6.3 Exakte Differentialgleichungen

Andere Bezeichnungen:
Pfaffsche Dgl., Dgl. für Kurvenscharen, Nullinien Pfaffscher Formen.

Pfaffsche Dgl, Dgl. für Kurvenscharen

1. Definitionen

Diese Dgl. haben die Form

I $P(x,y) + Q(x,y)\,y' = 0$ oder

II $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.$

Dabei geht die zweite aus der ersten Form durch formales Erweitern mit dx hervor. Eine Lösung ist im Fall

I eine Funktion $y(x)$, die die Dgl. erfüllt: $P(x,y(x)) + Q(x,y(x))\,y'(x) = 0.$

II Jetzt gibt es außerdem Lösungskurven, die keine Graphen von Funktionen sind: eine Lösungskurve hat eine Parametrisierung $\phi(t) = (x(t),\, y(t))^\top$, so daß $P(x(t),y(t))\,\dot{x}(t) + Q(x(t),y(t))\,\dot{y}(t) = 0$ ist. Der Punkt bezeichnet dabei die Ableitung nach t.

Im Fall II ist mit $t = x$ (dann ist $\frac{dx}{dt} = 1$ und $\frac{dy}{dt} = y'$) der Fall I mit enthalten.

Die Dgl. heißt exakt, falls es eine Stammfunktion F mit $F_x = P$ und $F_y = Q$ gibt. Alle Lösungen der Dgl. ergeben sich dann durch Auflösen der Gleichung $F(x,y) = C$, wobei C eine beliebige Konstante ist.

exakte Dgl., Stammfunktion

Falls die Dgl. nicht exakt ist, läßt sich manchmal eine Funktion $\mu(x,y)$ finden, so daß die Dgl. $\mu P\,dx + \mu Q\,dy = 0$ exakt ist. Eine solche Funktion μ heißt integrierender Faktor oder Eulerscher Multiplikator.

integrierender Faktor, Eulerscher Multiplikator

2. Berechnung

1. Ist die vorgelegte Dgl. exakt? ($P_y = Q_x$)
   Falls nicht: Bestimmung eines Eulerschen Multiplikators.

2. Bestimmung einer Stammfunktion $F(x,y)$.

3. Bestimmung der Lösungen aus $F(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$

   Falls ein Multiplikator benutzt wurde:
   Test, ob sich die Lösungsmenge geändert hat.

4. Ist ein AWP mit $y(x_0) = y_0$ gegeben, so bestimmt sich C durch $F(x_0,y_0) = C$.

Test auf Exaktheit

zu ①: Kriterium für Exaktheit

- Ist die Dgl. exakt und F zweimal stetig diff'bar, so ist überall $P_y = Q_x$.
- Ist auf einen einfach zusammenhängenden Gebiet überall $P_y = Q_x$, so gibt es dort eine Stammfunktion. (Sternförmige oder konvexe Gebiete sind einfach zusammenhängend, insbesondere ist das der Fall, wenn die Dgl. auf dem ganzen $\mathbb{R}^2$ definiert ist.)

Bestimmung eines Eulerschen Multiplikators μ

Bestimmung eines Eulerschen Multiplikators

Falls $P_y = Q_x$ nicht erfüllt ist, macht man einen
Ansatz: $\mu(x,y)\,P(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,Q(x,y)\,dy = 0$ soll exakt sein.
Die Exaktheitsbedingung $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$ gibt

$$\mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x \quad \Leftrightarrow \quad \mu_y P - \mu_x Q = \mu\,(Q_x - P_y).$$

Zwei Spezialfälle:

Es gibt einen nur von x abhängenden Multiplikator
$\Leftrightarrow \mu_y = 0$
$\Leftrightarrow w := -\dfrac{Q_x - P_y}{Q}$ hängt nur von x ab
$\Leftrightarrow \mu(x) = \exp(\int w(x)\,dx)$ ist integrierender Faktor

$\mu = \mu(x)$

Es gibt einen nur von y abhängenden Multiplikator
$\Leftrightarrow \mu_x = 0$
$\Leftrightarrow w := \dfrac{Q_x - P_y}{P}$ hängt nur von y ab
$\Leftrightarrow \mu(y) = \exp(\int w(y)\,dy)$ ist integrierender Faktor

$\mu = \mu(y)$

Ein Beispiel zur Bestimmung eines integrierenden Faktors, der weder allein von x noch von y abhängt, findet sich bei den Beispielen.

Stammfunktion bestimmen

zu ②: Bestimmung einer Stammfunktion

Gesucht ist eine Funktion F, deren Gradient das Vektorfeld $(P,Q)^\top$ ist.

Hinguckmethode

Methode 1: Hinguckmethode

F muß einerseits die Form $\int P(x,y)\,dx$ und andererseits $\int Q(x,y)\,dy$ haben. Man schreibt beide Ausdrücke hin, streicht doppelt vorkommende Terme einmal heraus und addiert beide Ausdrücke.
Hier muß man unbedingt als Probe $F_x = P$ und $F_y = Q$ nachrechnen!

Methode 2: Mehrfache Integration

Mehrfache Integration

① $F(x,y) = \int P(x,y)\,dx + C(y)$

② Diese Gleichung wird nach y abgeleitet und mit $F_y = Q(x,y)$ kombiniert. Daraus wird $C'(y)$ bestimmt.

③ $C(y)$ wird bestimmt und in ① eingesetzt.

Diese Methode hat die Variante, daß die Rollen von x und y vertauscht werden: zunächst wird Q nach y integriert und man erhält F bis auf eine von x abhängende Konstante.

Methode 3: Berechnung durch Kurvenintegrale

Kurvenintegrale

Ⓐ $F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,s)\,ds$

Ⓑ $F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,s)\,ds$

Ⓒ
$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_0^1 \Big[P(x_0+t(x-x_0), y_0+t(y-y_0))\,(x-x_0) \\ &\qquad + Q(x_0+t(x-x_0), y_0+t(y-y_0))\,(y-y_0)\Big]\,dt \\ &= (x-x_0)\int_0^1 P(x_0+t(x-x_0), y_0+t(y-y_0))\,dt \\ &\qquad + (y-y_0)\int_0^1 Q(x_0+t(x-x_0), y_0+t(y-y_0))\,dt \end{aligned}$$

Dabei entsprechen die drei Varianten jeweils einem Kurvenintegral:

Ⓐ von (x_0,y_0) über (x,y_0) nach (x,y),

Ⓑ von (x_0,y_0) über (x_0,y) nach (x,y),

Ⓒ von (x_0,y_0) direkt nach (x,y).

Man hat also darauf zu achten, daß diese Strecken im Definitionsbereich der Dgl. liegen.

Ist ein Anfangswert $y(x_0) = y_0$ gegeben, so liefert diese Methode sofort die Lösung des AWP durch Auflösen von $F(x,y) = 0$. Ist die allgemeine Lösung gesucht, so wählt man den Startpunkt (x_0,y_0) möglichst günstig, d.h. so, daß in einem Integral möglichst viele Terme wegfallen. Oft ist $(x_0,y_0) = (0,0)$ eine gute Wahl.

Falls man sich entschließt, mit allgemeinem x_0 und y_0 zu rechnen, läßt sich die Stammfunktion so zusammenfassen, daß sich eine Summe von zwei Termen ergibt, von denen der eine nur x und y und der andere nur x_0 und y_0 enthält.

Vergleich der Methoden

Vergleich der Methoden

	Vorteil	Nachteil
Methode 1	Schnellste Methode bei einfach gebauten Dgl.	Fehleranfällig bei komplizierteren Rechnungen
Methode 2	einfache Universalmethode	eigentlich keiner
Methode 3	liefert gleich die Lösung des AWP	unnötig komplizierte Rechnungen durch Mitführen der Anfangswerte

Auflösen

zu ③: Auflösen und Kontrolle

Oft läßt sich die Gleichung $F(x, y) = C$ nicht nach y auflösen, so daß man nur eine implizite Lösung erhält.

Kontrolle

Wurde ein Multiplikator μ benutzt, so müssen folgende Kontrollen vorgenommen werden:

i) Die Lösungen von $\mu(x, y) = 0$ sind Lösungen der modifizierten Dgl. Sind es auch Lösungen der ursprünglichen Gleichung?

ii) Die Lösungen von $\dfrac{1}{\mu(x, y)} = 0$ sind eventuell weggefallen. Waren es Lösungen der ursprünglichen Gleichung?

3. Beispiele

Beispiel 1: $(2x + 4y + 2)\, dx \;+\; (4x + 12y + 8)\, dy \;=\; 0, \quad y(0) = -1$

Alternativ zu der folgenden Rechnung läßt sich die Dgl. auch umschreiben in $y' = -\dfrac{2x + 4y + 2}{4x + 12y + 8}$ und als Dgl. vom Typ 4 aus Abschnitt 2 lösen.

① Mit $P = 2x + 4y + 2$ und $Q = 4x + 12y + 8$ ist $P_y = 4 = Q_x$. Die Dgl. ist also exakt.

② **Nach Methode 1 (Hinguckmethode)**

Einerseits muß $F(x, y)$ bei Integration von P nach x wie $x^2 + 4xy + 2x$, andererseits (bei Integration von Q nach y) wie $4xy + 6y^2 + 8y$ aussehen. Der doppelt vorkommende Term $4xy$ wird einmal gestrichen, der Rest wird addiert, also $F(x, y) = x^2 + 4xy + 2x + 6y^2 + 8y$. Die Probe $F_x = P$, $F_y = Q$ geht auf. Fertig.

Nach Methode 2 (Mehrfache Integration)

Integration von P nach x ergibt $F(x,y) = x^2 + 4xy + 2x + C(y)$.
Ableiten nach y und Vergleich mit Q: $4x + C'(y) = 4x + 12y + 8$, also $C'(y) = 12y + 8$. Mit $C(y) = 6y^2 + 8y$ (es ist ja nur eine Stammfunktion gesucht, deshalb braucht man keine Integrationskonstante) hat man

$$F(x,y) = x^2 + 4xy + 2x + 6y^2 + 8y.$$

Nach Methode 3 (Kurvenintegrale)

Es ist $x_0 = 0$ und $y_0 = -1$.

$$\text{Ⓐ} \quad \begin{aligned} F(x,y) &= \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,s)\,ds \\ &= \int_0^x (2t + 4(-1) + 2)\,dt + \int_{-1}^{y} (4x + 12s + 8)\,ds \\ &= (t^2 - 2t)\big|_0^x + (4xs + 6s^2 + 8s)\big|_{-1}^{y} \\ &= x^2 + 4xy + 2x + 6y^2 + 8y + 2. \end{aligned}$$

$$\text{Ⓑ} \quad \begin{aligned} F(x,y) &= \int_{x_0}^{x} P(t,y)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,s)\,ds \\ &= \int_0^x (2t + 4y + 2)\,dt + \int_{-1}^{y} (0 + 12s + 8)\,ds \\ &= (t^2 + 4ty + 2t)\big|_0^x + (6s^2 + 8s)\big|_{-1}^{y} \\ &= x^2 + 4xy + 2x + 6y^2 + 8y + 2. \end{aligned}$$

Ⓒ Es ist $x_0 + t(x - x_0) = tx$ und $y_0 + t(y - y_0) = -1 + t(y+1)$.

$$\begin{aligned} F(x,y) &= (x - x_0)\int_0^1 P(x_0 + t(x-x_0), y_0 + t(y-y_0))\,dt \\ &\qquad + (y - y_0)\int_0^1 Q(x_0 + t(x-x_0), y_0 + t(y-y_0))\,dt \\ &= x\int_0^1 (2tx + 4(-1 + t(y+1)) + 2)\,dt \\ &\quad + (y+1)\int_0^1 (4tx + 12(-1 + t(y+1)) + 8)\,dt \\ &= x(t^2x - 2t + 2t^2(y+1))\big|_0^1 + (y+1)(2t^2x - 4t + 6t^2(y+1))\big|_0^1 \\ &= x(x - 2 + 2y + 2) + (y+1)(2x - 4 + 6(y+1)) \\ &= x^2 + 4xy + 2x + 6y^2 + 8y + 2. \end{aligned}$$

③ Wurde die Stammfunktion nach Methode 1 oder 2 bestimmt, muß noch die richtige Konstante bestimmt werden. Dazu werden $x = 0$ und $y = -1$

eingesetzt: $F(0,-1) = 6-8 = -2$. In jedem Fall erhält man also die Lösung der Dgl. als Auflösung von $x^2+4xy+2x+6y^2+8y+2 = 0$ bzw. $x^2+4xy+2x+6y^2+8y = -2$. Diese Gleichung läßt sich mit quadratischer Ergänzung in der Form $(x+2y+1)^2 + 2(y+1)^2 = 1$ schreiben. Die Lösungskurve beschreibt also eine Ellipse. Alternativ kann man natürlich auch mit Hilfe der p-q-Formel nach y auflösen.

Beispiel 2: $(xy^2+xye^x)\,dx + (2x^2y+xe^x)\,dy = 0$

Es ist $P(x,y) = xy^2+xye^x$ und $Q(x,y) = 2x^2y+xe^x$.

① Test auf Exaktheit: $P_y = 2xy+xe^x$, $Q_x = 4xy+(x+1)e^x$. Die Dgl. ist also nicht exakt und ein Multiplikator μ muß bestimmt werden.

Versuch 1: μ hängt nur von y ab.

Bilde also $w = \dfrac{Q_x-P_y}{P} = \dfrac{4xy+(x+1)e^x-2xy-xe^x}{xy^2+xye^x} = \dfrac{2xy+e^x}{xy(y+e^x)}$.
Da w sich nicht als nur von y abhängender Ausdruck schreiben läßt, gibt es keinen nur von y abhängenden integrierenden Faktor.

Versuch 2: μ hängt nur von x ab.

Bilde also
$w = -\dfrac{Q_x-P_y}{Q} = -\dfrac{4xy+(x+1)e^x-2xy-xe^x}{2x^2y+xe^x} = -\dfrac{2xy+e^x}{x(2xy+e^x)} = -\dfrac{1}{x}$.
Da w nur von x abhängt, ist $\mu(x) = \exp(\int -\frac{1}{x}\,dx) = \exp(-\ln|x|) = \dfrac{1}{|x|}$ integrierender Faktor. Mit derselben Begründung wie auf S. **??** nimmt man $\mu = \dfrac{1}{x}$. Die neue (exakte) Dgl lautet also

$$(y^2+ye^x)dx + (2xy+e^x)dy = 0.$$

Probe: $P_y = 2y+e^x$, $Q_x = 2y+e^x$, stimmt!

② Die Stammfunktion bestimmt man nach der **Hinguckmethode:** $F(x,y) = xy^2+ye^x$.

③ Alle Lösungen erhält man aus $xy^2+ye^x = C$, also für $x \neq 0$ mit der p-q-Formel

$$y = \frac{1}{2x}\left(-e^x \pm \sqrt{e^{2x}+4Cx}\right)$$

Da die Dgl. mit $\mu = \frac{1}{x}$ multipliziert wurde, muß getestet werden, ob die Lösung $\frac{1}{\mu} = x = 0$, also die y-Achse, weggefallen ist: in der Tat ist mit der Parametrisierung $x(t) = 0$, $y(t) = t$ und damit $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 1$ die ursprüngliche Dgl. erfüllt. Die y-Achse ist also auch eine Lösungskurve.

④ fällt weg, da kein Anfangswert gegeben ist.

Beispiel 3: $(2x^2y + y^3) + (x^3 + 2xy^2)y' = 0.$
Hinweis: es gibt einen von $t = xy$ abhängenden integrierenden Faktor.

① Es ist $P = 2x^2y+y^3$, $Q = x^3+2xy^2$ und damit $P_y = 2x^2+3y^2$ und $Q_x = 3x^2+2y^2$. Die Dgl. ist also nicht exakt. Laut Hinweis gibt es einen von $t = xy$ abhängenden integrierenden Faktor μ. Zur Bestimmung von μ werden die partiellen Ableitungen nach x und y mit der Kettenregel bestimmt:

$$\mu_x = \frac{d\mu}{dt}\frac{\partial t}{\partial x} = \mu' \cdot y, \quad \mu_y = \frac{d\mu}{dt}\frac{\partial t}{\partial y} = \mu' \cdot x.$$

Der Strich bezeichnet dabei die Ableitung nach t. Jetzt wird die Bestimmungsgleichung für μ ausgewertet:

$$\begin{aligned}
(\mu P)_y &= (\mu Q)_x \\
\mu_y P + \mu P_y &= \mu_x Q + \mu Q_x \\
\mu' x(2x^2y + y^3) + \mu(2x^2 + 3y^2) &= \mu' y(x^3 + 2xy^2) + \mu(3x^2 + 2y^2) \\
\mu'(2x^3y + xy^3 - x^3y - 2xy^3) &= \mu(3x^2 + 2y^2 - 2x^2 - 3y^3) \\
\mu'(x^3y - xy^3) &= \mu(x^2 - y^2) \\
\mu' xy(x^2 - y^2) &= \mu(x^2 - y^2) \\
\mu' &= \frac{1}{xy}\mu
\end{aligned}$$

μ löst also die Dgl. $\mu' = \frac{1}{t}\mu$. Eine Lösung ist $\mu(t) = t = xy$. Damit erhält man die neue (exakte) Dgl.

$$(2x^3y^2 + xy^4) + (x^4y + 2x^2y^3)y' = 0.$$

Probe: $P_y = 4x^3y + 4xy^3$, $Q_x = 4x^3y + 4xy^3$ stimmt!

② Die Stammfunktion bestimmt sich nach der Hinguckmethode:
$F(x, y) = \frac{1}{2}(x^4y^2 + x^2y^4)$.

③ Alle Lösungen sind implizit gegeben durch

$$x^4y^2 + x^2y^4 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Hinzugekommen sind eventuell die Lösungskurven $x = 0$ und $y = 0$ (das Achsenkreuz, das für $C = 0$ in der allgemeinen Lösung enthalten ist). Man erkennt, daß die x-Achse, die durch $y = 0$ gegeben ist, schon eine Lösung der Ausgangsgleichung war: man muß ja nur $y = 0$ (und dann natürlich auch y'=0) einsetzen. Die y-Achse ist bei <u>dieser</u> Form der Dgl. (mit y' formuliert) <u>keine</u> Lösung, da sie nicht der Graph einer Funktion ist.

④ entfällt, da kein Anfangswert gegeben ist.