Dieser Artikel behandelt einige Interpolationsverfahren.

Numerische Verfahren kann man nur mit der dazugehörigen Theorie verstehen und anwenden. Daher sind hier auch Theorie-Anteile und Beweise enthalten. Zur Abgrenzung von den Algorithmen sind sie in kleinerer Schrift gesetzt.

Inhaltsverzeichnis

1 Definition: Interpolationsproblem

1.1 Problemstellung

Gegeben seien $n+1$ Wertepaare (x_0, y_0), (x_1, y_1) bis (x_n, y_n), wobei die x-Werte alle verschieden sein sollen.
Gesucht ist ein Polynom p höchstens n-ten Grades mit der Eigenschaft $p(x_n) = y_n$.

Die x_i werden oft als Knoten oder Stützstellen bezeichnet.

Dieses Polynom heißt Interpolationspolynom zu den Knoten x_0 bis x_n.

Knoten
Stützstelle
Interpolations-
polynom

1.2 Eigenschaften

Das Interpolationsproblem ist eindeutig lösbar.

Die Lösbarkeit wird im unten durch die Angabe einer Lösung bewiesen.

Die Eindeutigkeit der Lösung: Sind p und q zwei Lösungen des Problems, so hat das Polynom $p - q$ höchstens den Grad n und die $n+1$ Nullstellen x_0 bis x_n, ist also das Nullpolynom. Daher ist $p = q$.

1.3 Varianten

Wird nicht das komplette Polynom, sondern nur der Wert an einer Stelle t gesucht, verwendet man das Neville-Schema in Abschnitt 3.
Eine Variante der Interpolationsaufgabe ist die Hermite-Interpolation, wo neben den Funktionswerten an den Knoten auch die Ableitungen vorgegeben sind, und die Spline-Interpolation.

2 Interpolationspolynom - Lagrangedarstellung

2.1 Konstruktion des Interpolationspolynoms

1. Sei $i \in \{0, \ldots, n\}$. Das i-te Lagrange-Grundpolynom zu den Knoten x_0 bis x_n ist definiert durch

Lagrange-
Grundpolynom

$$L_i(x) = \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} = \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \cdot \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_i - x_n}$$

Dann ist

$$L_i(x_k) = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \qquad \text{oder } L_i(x_k) = \delta_{ik}$$

Der Zähler von L_i hat genau die Nullstellen x_k mit $k \neq i$. Da der Nenner gerade der Zähler an der Stelle $x = x_i$ ist, hat der gesamte Ausdruck für $x = x_i$ den Wert 1.

② Das Interpolationspolynom ist die Summe der mit den entsprechenden y-Werten multiplizierten Grundpolynome.

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots y_n L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

Denn es ist

$$\begin{aligned} p(x_k) &= y_0 L_0(x_k) + \cdots + y_k L_k(x_k) + \cdots + y_n L_n(x_k) \\ &= y_0 \cdot 0 + \cdots + y_k \cdot 1 + \cdots + y_n \cdot 0 = y_k. \end{aligned}$$

2.2 Beispiel

Konstruiere das Interpolationspolynom zu den Daten

x_i	-1	0	2
y_i	3	1	3

① Zunächst werden die drei Grundpolynome konstruiert:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)} = \frac{1}{3}(x^2-2x) \\ L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)} = -\frac{1}{2}(x^2-x-2) \\ L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)} = \frac{1}{6}(x^2+x) \end{aligned}$$

② Jetzt wird das Interpolationspolynom daraus zusammengesetzt:

$$\begin{aligned} p(x) &= 3 \cdot L_0(x) + 1 \cdot L_1(x) + 3 \cdot L_2(x) \\ &= (x^2-2x) - \frac{1}{2}(x^2-x-2) + \frac{1}{2}(x^2+x) \\ &= x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

3 Newtondarstellung und Neville-Algorithmus - Theorie

3.1 Konstruktion von Interpolationspolynomen

Hier wird mit den Polynomen $P_{k,i}$ gerechnet. k bedeutet, dass die Knoten x_k, x_{k+1}, x_{k+2} usw. benutzt werden, und i ist der Grad des Polynoms; d.h. es werden die $i+1$ Knoten von x_k bis x_{k+i} benutzt. $P_{k,i}$

Die konstante Funktion $P_{k,0} = y_k$ ist das Interpolationspolynom nullten Grades zu dem Wert (x_k, y_k).

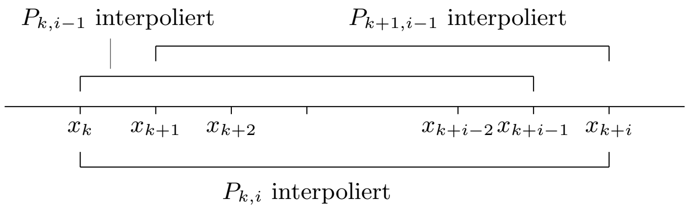
Induktiv definiert man nun: Sei

- $P_{k,i-1}(x)$ das Interpolationspolynom $(i-1)$-sten Grades zu den i Daten (x_k, y_k) bis (x_{k+i-1}, y_{k+i-1})
- $P_{k+1,i-1}(x)$ das Interpolationspolynom $(i-1)$-sten Grades zu den i Daten (x_{k+1}, y_{k+1}) bis (x_{k+i}, y_{k+i})

Dann hat $P_{k,i}(x)$, das Interpolationspolynom i-ten Grades zu den Daten (x_k, y_k) bis (x_{k+i}, y_{k+i}), die Gestalt

$$\begin{aligned} P_{k,i}(x) &= \frac{x_{k+i} - x}{x_{k+i} - x_k} P_{k,i-1}(x) + \frac{x - x_k}{x_{k+i} - x_k} P_{k+1,i-1}(x) \\ &= \frac{1}{x_{k+i} - x_k} \big((x_{k+i} - x) P_{k,i-1} - (x_k - x) P_{k+1,i-1} \big) \qquad (*) \end{aligned}$$

Gleichung(∗)



Beweis

- $P_{k,i}$ ist offenbar ein Polynom i-ten Grades.
- $P_{k,i}$ hat bei x_k den richtigen Wert:

$$\begin{aligned} P_{k,i}(x_k) &= \frac{x_{k+i} - x_k}{x_{k+i} - x_k} P_{k,i-1}(x_k) + \frac{x_k - x_k}{x_{k+i} - x_k} P_{k+1,i-1}(x_k) \\ &= P_{k,i-1}(x_k) = y_k \end{aligned}$$

- $P_{k,i}$ hat bei x_{k+i} den richtigen Wert:

$$\begin{aligned} P_{k,i}(x_{k+i}) &= \frac{x_{k+i} - x_{k+i}}{x_{k+i} - x_k} P_{k,i-1}(x_{k+i}) + \frac{x_{k+i} - x_k}{x_{k+i} - x_k} P_{k+1,i-1}(x_{k+i}) \\ &= P_{k+1,i-1}(x_{k+i}) = y_{k+i} \end{aligned}$$

- $P_{k,i}$ hat auch den Stellen x_j mit $k < j < k+i$ den richtigen Wert:

$$\begin{aligned} P_{k,i}(x_j) &= \frac{x_{k+i} - x_j}{x_{k+i} - x_k} P_{k,i-1}(x_j) + \frac{x_j - x_k}{x_{k+i} - x_k} P_{k+1,i-1}(x_j) \\ &= \frac{x_{k+i} - x_j}{x_{k+i} - x_k} y_j + \frac{x_j - x_k}{x_{k+i} - x_k} y_j = y_j. \end{aligned}$$

3.2 Interpolationspolynom

Benutzt man schließlich alle Knoten, erhält man:

Das Polynom $P_{0,n}$ ist das Interpolationspolynom zu den Werten (x_0, y_0) bis (x_n, y_n).

3.3 Neville-Algorithmus

Beim Neville-Algorithmus wird für einen festen Wert t das Interpolationspolynom mit Hilfe der Rekursionsgleichung $(*)$ bestimmt. Mit $p_{k,j} = P_{k,j}(t)$ ist $p_{0,i} = y_i$ und die weiteren Werte berechnen sich als

$$p_{k,i} = \frac{1}{x_{k+i} - x_k}((x_{k+i} - t)p_{k,i-1} - (x_k - t)p_{k+1,i-1})$$

Zum Schluss ist $p_{0,n}$ der Wert des Interpolationspolynoms bei $x = t$.

Der Algorithmus ist auf S. 8 beschrieben.

3.4 Newton-Darstellung

Die Newton-Darstellung benötigt etwas mehr Theorie. Es beruht auf folgender Darstellung des Interpolationspolynoms:

$$\begin{aligned} p(x) = &\alpha_0 \\ &+\alpha_1(x - x_0) \\ &+\alpha_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &\vdots \\ &+\alpha_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) \qquad (**) \end{aligned}$$

Gleichung(**

Jetzt wird α_0 so bestimmt, dass $p(x_0) = y_0$ ist: man erhält direkt $\alpha_0 = y_0$.

Setzt man den so bestimmten Wert von α_0 und $x = x_1$ ein, erhält man aus $p(x_1) = y_1$ eine eindeutige Bedingung für α_1, da alle weiteren Summanden einen Faktor $(x - x_1)$ enthalten.

Sind α_0 und α_1 bestimmt, erhält man durch Einsetzen von $x = x_2$ mit $p(x_2) = y_2$ eine Gleichung für α_2 u.s.w. So bekommt man schließlich rekursiv alle α_k.

Damit kann man im Prinzip das Interpolationspolynom berechnen. Da man hierbei aber viele Polynome auswerten muss, werden die α_k auf einem anderen Weg bestimmt:

Dazu bemerkt man, dass die α_k die Leitkoeffizienten der Interpolationspolynome zu den Stellen $x_0, x_1, \ldots x_k$ sind.

Um diese α_k zu bestimmen, wertet man die Gleichung $(*)$ noch einmal aus: ist $p_{k,j}$ der Leitkoeffizient von $P_{k,j}$, so erhält man

$$p_{k,i} = \frac{p_{k+1,i-1} - p_{k,i-1}}{x_{k+i} - x_k}.$$

Damit kann man die Werte $\alpha_k = p_{0,k}$ bestimmen und erhält das Interpolationspolynom aus Gleichung $(**)$.

3.5 Dividierte Differenzen

Die übliche Schreibweise für die $p_{i,k}$ ist die als dividierten Differenzen:

Dividierte Differenzen $y[\dots]$

Dabei verwendet man die Abkürzungen

$y[x_k] := y_k = p_{k,0}$ (das sind die Funktionswerte)

$$y[x_k, x_{k+1}] = \frac{y[x_{k+1}] - y[x_k]}{x_{k+1} - x_k} = p_{k,1}$$

$$y[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{y[x_{k+1}, x_{k+2}] - y[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k} = p_{k,2}$$

und allgemein

$$y[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+i-1}, x_{k+i}] = \frac{y[x_{k+1}, \dots, x_{k+i-1}, x_{k+i}] - y[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+i-1}]}{x_{k+i} - x_j} = p_{k,i}$$

4 Durchführung des Newton-Verfahrens

4.1 Algorithmus

1. Schreibe die Knoten x_i und entsprechenden y-Werte y_i in zwei Spalten.
2. Fülle zunächst die linke Seite aus: Der Wert eines Eintrag ist die Differenz der beiden diagonal erreichbaren x-Werte.
3. Die rechte Seite wird so ausgefüllt, dass der Wert eines Eintrags die Differenz der Einträge in der Spalte davor ist, geteilt duch den entsprechenden Eintrag der linken Seite.

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & x_0 & y[x_0] & & & \\
 & & x_1 - x_0 & & & y[x_0,x_1] & & \\
 & x_2 - x_0 & & x_1 & y[x_1] & & y[x_0,x_1,x_2] & \\
x_3 - x_0 & & x_2 - x_1 & & & y[x_1,x_2] & & y[x_0,x_1,x_2,x_3] \\
 & x_3 - x_1 & & x_2 & y[x_2] & & y[x_1,x_2,x_3] & \\
 & & x_3 - x_2 & & & y[x_2,x_3] & & \\
 & & & x_3 & y[x_3] & & &
\end{array}$$

Zum Beispiel ist $y[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{y[x_2, x_3] - y[x_2, x_1]}{x_3 - x_1}$.

④ die obere Diagonale der rechten Seite enthält die α-Werte des Interpolationspolynoms: $\alpha_0 = y[x_0]$, $\alpha_1 = y[x_0, x_1]$ usw.

⑤ Daraus erhält man

$$\begin{aligned} p(x) = & y[x_0] + y[x_0, x_1](x - x_0) + y[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \\ & + y[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

Beispiel 1: Das Interpolationspolynom zu den Daten

x_i	-1	0	2	3
y_i	3	1	3	19

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & -1 & 3 & & & \\
 & & 1 & & & \boxed{-2} & & \\
 & \boxed{3} & & 0 & 1 & & 1 & \\
4 & & 2 & & & \boxed{1} & & 1 \\
 & 3 & & 2 & 3 & & 5 & \\
 & & 1 & & & 16 & & \\
 & & & 3 & 19 & & &
\end{array}$$

Dabei entsteht z.B. die Zahl im Kreis durch die Zahlen in den Quadraten:
$\dfrac{1 - (-2)}{3} = 1.$
Damit wird

$$p(x) = 3 - 2(x + 1) + 1 \cdot x(x + 1) + 1(x - 2)x(x + 1) = x^3 - 3x + 1.$$

5 Durchführung des Neville-Verfahrens

Das Neville-Verfahren dient zur Ermittlung des Wertes des Interpolationspolynoms zu den Daten (x_0, y_0) bis (x_n, y_n) an der Stelle $x = t$.

5.1 Algorithmus

$$\begin{array}{ccccc|c|ccccc}
 & & & & x_k & x_k - t & y_k & & & & \\
 & & & & x_0 & \boxed{x_0 - t} & p_{0,0} & & & & \\
 & & & x_1 - x_0 & & & & p_{0,1} & & & \\
 & & x_2 - x_0 & & x_1 & x_1 - t & p_{1,0} & & \boxed{p_{0,2}} & & \\
 & \boxed{x_3 - x_0} & & x_2 - x_1 & & & & p_{1,1} & & p_{0,3} & \\
x_4 - x_0 & & x_3 - x_1 & & x_2 & x_2 - t & p_{2,0} & & \boxed{p_{1,2}} & & p_{0,4} \\
 & x_4 - x_1 & & x_3 - x_2 & & & & p_{2,1} & & p_{1,3} & \\
 & & x_4 - x_2 & & x_3 & \boxed{x_3 - t} & p_{3,0} & & p_{2,2} & & \\
 & & & x_4 - x_3 & & & & p_{3,1} & & & \\
 & & & & x_4 & x_4 - t & p_{4,0} & & & &
\end{array}$$

① Zunächtst werden die Ausgangsdaten in drei Spalten geschrieben: links stehen die x_k, daneben die Differenzen $x_k - t$ und rechts die $y_k = p_{k,0}$.

② Genau wie beim Newton-Verfahren werden links die Differenzen der x-Werte notiert.

Wenn man will, kann man wegen $(x_i - t) - (x_k - t) = x_i - x_k$ die Spalte mit den x_i auch weglassen und die Differenzen aus der mittleren Spalte berechnen.

③ Das Ausfüllen der rechten Seite geht spaltenweise vor sich:

$$p_{k,i} = \frac{1}{x_{k+i} - x_k}((x_{k+i} - x)p_{k,i-1} - (x_k - x)p_{k+1,i-1})$$

Die beteiligten Größen sind im Beispiel gekennzeichnet: Die Zahl im Kreis entsteht, indem die Zahlen in den Rechtecken über Kreuz multipliziert werden. Dann wird die Differenz (genau andersherum als bei einer 2×2-Determinate) durch die Zahl ganz links dividiert.

④ Der Wert des Interpolationspolynoms bei $x = t$ ist dann $p_{0,n}$, die Zahl ganz rechts.

Beispiel 1: Gesucht ist der Wert des Interpolationspolynoms zu den Daten

x_i	-2	-1	0	1	3
y_i	35	1	-1	-1	5

an der Stelle $t = 2$.

				x_k	$x_k - t$	y_k				
				-2	$\boxed{-4}$	35				
			1				-101			
		2		-1	-3	1		$\boxed{91}$		
	$\boxed{3}$		1				-5		-29	
5		2		0	-2	-1		$\boxed{1}$		-5
	4		1				-1		1	
		3		1	$\boxed{-1}$	-1		1		
			2				2			
				3	1	5				

Wie oben setzt sich der Wert im Kreis aus den Zahlen im Rechteck zusammen:
$\dfrac{91 \cdot (-1) - 1 \cdot (-4)}{3} = 29.$

Damit hat das Interpolationspolynom bei $t = 2$ der Wert $p(2) = -5$.

6 Fehlerabschätzung

6.1 Definition: Interpolationsfehler

Interpolationsfehler

Gegeben sind eine Funktion f, die $n + 1$ Knoten x_0 bis x_n und das Interpolationspolynom p zu diesen Daten $(x_i, f(x_i))$.
Wie groß ist der Interpolationsfehler $p(x) - f(x)$? Wie groß ist das Maximum des Betrages dieser Differenz?

Zur Beantwortung dieser Frage benötigt man diese einleuchtende Tatsache:

Hilfssatz

Sei $a \neq b$ und $g(a) = g(b)$.

Dann gibt es (mindestens) eine Stelle $x_0 \in [a, b]$ mit $g'(x_0) = 0$.

6.2 Folgerung

Hat g die $n + 1$ Nullstellen x_0 bis x_n (der Größe nach geordnet), so hat $g^{(n+1)}$ (mindestens) eine Nullstelle $z \in [x_0, x_n]$.

Bemerkung

Dies gilt auch bei mehrfachen Nullstellen: hat eine Funktion f in $x-k$ eine $m+1$-fache Nullstelle, dann hat die m-te Ableitung von f immer noch eine Nullstelle in x_k.

Beweis:

Induktiv folgt mit $g(x_0) = g(x_1) = \cdots = g(x_n)$, dass g' jeweils zwichen den Nullstellen von g n Nullstellen haben muss, und dazwischen liegen $n-1$ Nullstellen von g'' usw. DIe Behauptung folgt jetzt induktiv.

6.3 Definition und Eigenschaften

Knoten-polynom Ω

(i) Das Knotenpolynom Ω ist definiert durch

$$\Omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$

(ii) Offensichtlich gilt $\Omega(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{x_0, \cdots, x_n\}$.

(iii) Da Ω den Grad $n+1$ hat und normiert ist (der Vorfaktor von x^{n+1} ist eins), ist die $(n+1)$ste Ableitung von Ω konstant gleich $(n+1)!$.

6.4 Abschätzung des Interpolationsfehlers

Zu den Knoten $x_0 < \cdots < x_n$ gibt es eine Stelle $z \in [x_0, x_n]$ mit

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\Omega(x).$$

Hinweis: $x \in [x_0, x_n]$ ist nicht erforderlich.

Beweis:

Ist x ein Knoten, so ist der Fehler Null und die Behauptung gilt.

Ist x kein Knoten, so ist $\Omega(x) \neq 0$. Daher gibt es eine reelle (von x abhängige Zahl) C mit

$$f(x) - p(x) = C \cdot \Omega(x).$$

Betrachte nun die Funktion

$$g(t) = f(t) - p(t) - C \cdot \Omega(t).$$

Dann hat g in allen Knoten eine Nullstelle (insgesamt $n+1$). Also gibt es eine Zahl $z \in [x_0, x_n]$ mit $g^{(n+1)}(z) = 0$. Das heißt

$$0 = g^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - \underbrace{p^{(n+1)}(z)}_{=0} - C\underbrace{\Omega^{(n+1)}(z)}_{=(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}.$$

Daher ist

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\Omega(x).$$

> **Beispiel 1:** Die Werte von $f(x) = \sin x$ werden durch ein Interpolationspolynom p approximiert. Dabei sind die Knoten $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$ und $x_3 = \frac{\pi}{2}$ vorgegeben.
> Wie groß kann der Interpolationsfehler $\sin x - p(x)$ für $x \in [x_1, x_2]$ werden?

Mit $n = 4$ und $f(x) = \sin x$ ist $f^{(4)}(x) = \sin x$ und daher $0 \leq f^{(4)}(\xi) \leq 1$.

Es ist $\Omega(x) = (x-0)(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{3})(x-\frac{\pi}{2})$. Für $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ ist $\Omega(x) \geq 0$, da genau zwei negative Faktoren auftreten. Weiter ist hier

$$\Omega(x) \leq \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi^4}{324}$$

Damit wird

$$\frac{0}{4!} \cdot 0 \leq \sin x - p(x) \leq \frac{1}{4!} \cdot \frac{\pi^4}{324} \approx 0.013$$

In vielen Fällen kann man nur den Betrag des Interpolationsfehlers abschätzen. Hier erhält man dann

$$|\sin(x) - p(x)| \leq 0.013 \quad \text{für} \quad x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}].$$

Andererseits kann man noch genauer abschätzen: Ω ist ein Polynom vierten Grades und hat daher zwischen den vier Nullstellen drei relative Extrema. Da alle Knoten symmetrisch zu $\frac{\pi}{4}$ liegen, muss Ω dort ein Extremum haben. Daher ist im Intervall $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$

$$0 \leq \Omega(x) \leq \Omega(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^4}{2304}.$$

Damit folgt für den Interpolationsfehler

$$0 \leq \sin(x) - p(x) \leq \frac{\pi^4}{24 \cdot 2304} \approx 0.00177$$

Die Abweichung ist also kleiner als $\frac{1}{500}$.

7 Hermite-Interpolation

7.1 Hermite-Interpolationsaufgabe

Hermite-Interpolationsaufgabe

Gelegentlich ist dies Problem so definiert, dass an jedem Knoten Funktionswert und (erste) Ableitung vergegeben werden. Hier wird eine etwas allgemeinere Aufgabenstellung behandelt.

Bei der Hermite-Interpolation wird ein Polynom p bestimmt, das an den Knoten nicht nur vorgegebene Funktionswerte, sonder möglicherweise auch vorgegebene Ableitungen hat. Die Ordnung der Ableitungen an den Knoten kann verschieden sein. Allerdings muss, wenn die k-te Ableitung an einer Stelle x vorgegeben wird, auch der Funktionswert $p(x)$ und alle Ableitungen niedrigerer Ordnung $p'(x)$ bis $p^{(k-1)}(x)$ vorgegeben werden.

7.2 Algorithmus

Hat man bei der Interpolation einer Funktion f zwei x-Werte als x_1 und $x_2 = x_1 + h$, so ist $y[x_1, x_2] = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Strebt h gegen Null, dann konvergiert die rechte Seite gegen $f'(x)$. Mit Taylorentwicklung lässt sich nachweisen, dass in einer entsprechenden Situation mit drei gleichen x-Werten der entsprechende Teil des Newton-Schemas so aussieht:

Ausfüllen des Schemas

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 & & x_0 & f(x_0) & & \\
 & 0 & & & f'(x_0) & \\
0 & & x_0 & f(x_0) & & \frac{1}{2}f''(x_0) \\
 & 0 & & & f'(x_0) & \\
 & & x_0 & f(x_0) & &
\end{array}$$

Im allgemeinen gehört zu k gleichen x-Werten in der ersten Spalte auf der rechten Seite k mal $p(x)$, daneben $k-1$ mal $p'(x)$, $k-2$ mal $\frac{1}{2!}p''(x)$ u.s.w bis einmal $\frac{1}{k!}p^{(k)}(x)$.

Das Interpolationspolynom wird aus den Werten der oberen Diagonalen der rechten Seite genauso wie bei der Newtondarstellung bestimmt. Neu ist, dass jetzt auch Potenzen von Faktoren $(x - x_k)$ vorkommen.

Beispiel 1: Gesucht ist ein Polynom p mit $p(1) = -5$, $p'(1) = -13$, $p''(1) = -16$, $p'''(1) = 24$, $p(2) = -16$ und $p'(2) = 8$.

Da dies 6 Bedingungen sind, sucht man ein Interpolationspolynom fünften Grades.

Zunächst werden die Werte in das Schema eingetragen:

$$
\begin{array}{cccc|cccccl}
 & & & 1 & -5 & & & & & \\
 & & 0 & & & -13 & & & & \\
 & 0 & & 1 & -5 & & -8 & & & \\
0 & & 0 & & & -13 & & 4 & \longleftarrow & \frac{1}{3!}p'''(1) \\
 & 0 & & 1 & -5 & & -8 & & & \\
 & & 0 & & & -13 & & & & \frac{1}{2!}p''(1) \\
 & & & 1 & -5 & & & & & p'(1) \\
 & & & & & & & & & \\
 & & & 2 & -16 & & & & & \\
 & & 0 & & & 8 & \longleftarrow & & & p'(2) \\
 & & & 2 & -16 & & & & &
\end{array}
$$

Dann wird wie bei der Newtondarstellung ausgefüllt:

$$
\begin{array}{cccccc|cccccc}
 & & & & & 1 & -5 & & & & & \\
 & & & & 0 & & & -13 & & & & \\
 & & & 0 & & 1 & -5 & & -8 & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & -13 & & 4 & & \\
 & 1 & & 0 & & 1 & -5 & & -8 & & 6 & \\
1 & & 1 & & 0 & & & -13 & & 10 & & 1 \\
 & 1 & & 1 & & 1 & -5 & & 2 & & 7 & \\
 & & 1 & & 1 & & & -11 & & 17 & & \\
 & & & 1 & & 2 & -16 & & 19 & & & \\
 & & & & 0 & & & 8 & & & & \\
 & & & & & 2 & -16 & & & & &
\end{array}
$$

Daraus ergibt sich das Hermite-Interpolationspolynom

$$p(x) = -5 - 13(x-1) - 8(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + 6(x-1)^4 + (x-1)^4(x-2)$$

Fleißiges Ausmultiplizieren zeigt, dass $p(x) = x^5 - 6x^3$ ist.

8 Beispiele

Beispiel 1: Bestimmung der Lagrange-Darstellung des Interpolationspolynoms zu den Daten

i	0	1	2	3
x_i	-3	-1	1	3
y_i	0	16	32	0

Da nur y_1 und y_2 von Null verschieden sind, braucht man nur L_1 und L_2 zu berechnen.

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x+3)(x-1)(x-3)}{(-1+3)(-1-1)(-1-3)}$$

Der Zähler ist $(x-1)(x^2-9) = x^3-x^2-9x+9$, der Nenner ist der Zähler bei $x=-1$, also $-1-1+9+9=16$. Also ist $L_1(x) = \frac{1}{16}(x^3-x^2-9x+9)$.

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+3)(x+1)(x-3)}{(1+3)(1+1)(1-3)}$$

$$= \frac{(x^2-9)(x+1)}{-16} = -\frac{1}{16}(x^3+x^2-9x-9)$$

Damit ist das Interpolationspolynom

$$p(x) = 16\cdot L_1(x) + 32\cdot L_2(x) = 1\cdot(x^3-x^2-9x+9) - 2\cdot(x^3+x^2-9x-9)$$

$$= -x^3-3x^2+9x+27$$

Beispiel 2: Wie sieht das allgemeine Interpolationspolynom zu den Knoten $a-h$, a und $a+h$, $h \neq 0$, in der Lagrange-Darstellung aus?

Zunächst wird das Problem für $a=0$ gelöst: Mit $x_0=-h$, $x_1=x$ und $x_2=+h$ erhält man

$$L_0(x) = \frac{x(x-h)}{(-h)(-2h)} = \frac{1}{2h^2}(x^2-hx)$$

$$L_1(x) = \frac{(x+h)(x-h)}{h(-h)} = \frac{-1}{h^2}(x^2-h^2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x+h)x}{h\cdot 2} = \frac{1}{2h^2}(x^2+hx)$$

Damit ist

$$p(x) = \frac{1}{2h^2}(y_0\cdot(x^2-hx) - 2y_1\cdot(x^2-h^2) + y_2\cdot(x^2+hx).$$

Die Lösung des allgemeinen Problems erhält man jetzt, indem man x durch $(x-a)$ ersetzt:

$$p(x) = \frac{1}{2h^2}\Big(y_0\cdot((x-a)^2-h(x-a))-2y_1\cdot((x-a)^2-h^2)+y_2\cdot((x-a)^2+h(x-a))\Big)$$

Beispiel 3: Dasselbe Problem (Beispiel 2) mit der Newtondarstellung

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
 & & a-h & y_0 & & \\
 & h & & & \dfrac{y_1-y_0}{h} & \\
2h & & a & y_1 & & \dfrac{y_2-2y_1+y_0}{2h^2} \\
 & h & & & \dfrac{y_2-y_1}{h} & \\
 & & a+h & y_2 & &
\end{array}
$$

Man erhält damit

$$p(x) = y_0 + \frac{y_1-y_0}{h}(x-(a-h)) + \frac{y_2-2y_1+y_0}{2h^2}(x-a)(x-(a-h)).$$

Das ist natürlich dasselbe Polynom wie oben.

Beispiel 4:

x_i	-3	-1	0	2	3
y_i	49	-3	1	9	61

Gesucht ist das Interpolationspolynom zu diesen Daten in der Newton-Darstellung und der der Wert für $x=1$.

$$
\begin{array}{ccccc|ccccc}
 & & & & -3 & 49 & & & & \\
 & & & 2 & & & -26 & & & \\
 & & 3 & & -1 & -3 & & 10 & & \\
 & 5 & & 1 & & & 4 & & -2 & \\
6 & & 3 & & 0 & 1 & & 0 & & 1 \\
 & 4 & & 2 & & & 4 & & 4 & \\
 & & 3 & & 2 & 9 & & 16 & & \\
 & & & 1 & & & 52 & & & \\
 & & & & 3 & 61 & & & &
\end{array}
$$

Daher ist

$$
\begin{aligned}
p(x) &= 9-26(x+3)+10(x+3)(x+1)-2(x+3)(x+1)x+1\cdot(x+3)(x+1)x(x-2) \\
&= \cdots = x^4-3x^2+2x+1.
\end{aligned}
$$

Um das Polynom mit möglichst wenig Mühe auszuwerten, schreibt man es ähnlich wie beim Hornerschema:

$$p(x) = (((1\cdot(x-2)-2)x+10)(x+1)-26)(x+3)+9$$

also

$p(1) = (((1 \cdot (-1) - 2) \cdot 1 + 10) \cdot 2 - 26) \cdot 4 + 9 = (14 - 26) \cdot 4 + 49 = -48 + 49 = 1.$

Beispiel 5: Dasselbe Problem mit dem Neville-Schema

Dies gerechnet sieht so aus:

				-3	-4	49				
			2				-55			
		3		-1	-2	-3		25		
	5		1				5		9	
6		3		0	-1	1		5		1
	4		2				5		-3	
		3		2	1	9		-11		
			1				-43			
				3	2	61				

Beispiel 6: Gesucht ist eine Abschätzung für den Interpolationsfehler von $f(x) = e^{-x}$ auf dem Intervall $[0,1]$ mit den Knoten $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{3}{8}$ und $x_2 = 1$.

Mit $n = 2$ ist $f^{(n+1)}(x) = f'''(x) = -e^{-x}$ und $|f'''(x)| \leq 1$ auf $[0,1]$.

Das Knotenpolynom ist

$$\Omega(x) = x(x - \frac{3}{8})(x-1) = x^3 - \frac{11}{8}x^2 + \frac{3}{8}x.$$

Um die Größe von Ω abzuschätzen beachtete man, dass Ω an den Knoten Null ist und offenbar in jedem Teilintervall ein Extremum besitzt.

$$\Omega'(x) = 3x^2 - \frac{11}{4}x + \frac{3}{8} = \quad (p\text{-}q\text{-Formel}) \quad = 3(x - \frac{1}{6})(x - \frac{3}{4})$$

Mit $\Omega(\frac{1}{6}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{-5}{24} \cdot \frac{-5}{6} = \frac{25}{864}$ und $\Omega(\frac{3}{4}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8}\frac{-1}{4} = \frac{-9}{128}$ sieht man, dass $|\Omega(x)| \leq \frac{9}{128}$ ist.

Daher ist der Interpolationsfehler

$$|e^{-x} - p(x)| \leq \frac{1}{3!}\frac{9}{128} = \frac{3}{256}.$$

Beispiel 7: Welches Polynom erfüllt $p(1) = 2$, $p'(1) = 3$, $p''(1) = 4$, $p(0) = 5$ und $p'(0) = 6$?
(Hermite-Interpolation)

Folgende Werte werden in das Schema eingetragen:

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
 & & 0 & 5 & & \\
 & 0 & & & 6 & \\
 & & 0 & 5 & & \\
 & & & & & \\
 & & 1 & 2 & & \\
 & 0 & & & 3 & \\
0 & & 1 & 2 & & 2 \\
 & 0 & & & 3 & \\
 & & 1 & 2 & &
\end{array}
$$

Und so sieht dann das fertige Schema aus:

$$
\begin{array}{ccccc|ccccc}
 & & & & 0 & 5 & & & & \\
 & & & 0 & & & 6 & & & \\
 & & 1 & & 0 & 5 & & -9 & & \\
 & 1 & & 1 & & & -3 & & 15 & \\
1 & & 1 & & 1 & 2 & & 6 & & -19 \\
 & 1 & & 0 & & & 3 & & -4 & \\
 & & 0 & & 1 & 2 & & 2 & & \\
 & & & 0 & & & 3 & & & \\
 & & & & 1 & 2 & & & &
\end{array}
$$

Es ist also

$p(x) = 5 + 6x - 9x^2 + 15x^2(x-1) - 19x^2(x-1)^2 = -19x^4 + 53x^3 - 43x^2 + 6x + 5.$