1 Vorbemerkungen

Alle Vektoren sind hier Spaltenvektoren. Eine Matrix besteht aus nebeneinandergeschriebenen Vektoren. Wird die Matrix $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ mit dem Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ multipliziert, so ist das Ergebnis der Vektor $A\vec{c} = c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_v\vec{a}_n$. Das bedeutet, dass das Ergebnis eine Matrix-Vektor-Multiplikation eine Linearkombination der Spalten der Matrix mit den Koeffizienten im Vektor ist.

Wird eine Matrix A mit einer Matrix $C = (\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_m)$ (von rechts) multipliziert, so besteht das Resultat AC aus den nebeneinandergeschriebenen Spalten $(A\vec{c}_1, \ldots, A\vec{c}_m)$.

2 Theorie

$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ sei eine lineare Abbildung.

Um eine einfache Darstellung der Abbildung A zu erhalten, sucht man zunächst invariante Unterräume des $\mathbb{C}^n$; d.h. Unterräume U mit $AU \subseteq U$. Der erste Schritt dazu ist die Bestimmung von Eigenvektoren. Das sind Vektoren $\vec{v}$ mit $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Dies bedeutet, dass der von $\vec{v}$ aufgespannte Unterraum invariant ist, und dass A darin eine Streckung um den Faktor λ bewirkt.

Es ist $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$.
$\Leftrightarrow$ Es gibt einen Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ mit $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow$ der Kern von $A - \lambda I$ ist nichttrivial
$\Leftrightarrow$ $A - \lambda I$ ist nicht regulär
$\Leftrightarrow$ $\det(A - \lambda I) = 0$

2.1 Definition

(i) Das <u>charakteristische Polynom</u> p von A ist definiert als $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

(ii) Über $\mathbb{C}$ zerfällt p in n Linearfaktoren:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1}(\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{\nu_k} \quad \text{mit} \quad \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_k = n.$$

Die Zahlen λ_1 bis λ_k heißen <u>Eigenwerte</u> (EW) von A, $\ker A - \lambda_\nu$ist der <u>Eigenraum</u>, die nichttrivialen Elemente davon heißen <u>Eigenvektoren</u> (EV).

(iii) Ist λ ein Eigenwert von A, so nennt man $\{\vec{v} \,|\, A\vec{v} = \lambda\vec{v}\} = \ker(A - \lambda I)$ den Eigenraum zu λ.

(iv) Ist λ eine r-fache Nullstelle von p, so heißt r <u>arithmetische Vielfachheit</u> von λ. Die Dimension des Eigenraums $r_1 > 0$ heißt <u>geometrische</u> Vielfachheit.

Ab jetzt sei λ ein fester EW von A und $B := A - \lambda I$. Dann beweist man:

2.2 Lemma 1

Mit $r_i := \dim\ker B^i$ ist $0 =: r_0 < r_1 < r_2 < \cdots r_w = r_{w+1} = \cdots = r$.

Beweis:

Für jede lineare Abbildung B gilt $\ker B^i \subseteq \ker B^{i+1}$, denn für $\vec{x} \in \ker B^i$ folgt $B^{i+1}\vec{x} = BB^i\vec{x} = B\vec{0} = \vec{0}$, also $\vec{x} \in \ker B^{i+1}$ und damit $r_i \leq r_{i+1}$.

Gilt andererseits einmal $r_i = r_{i+1}$, so ist $\ker B^i = \ker B^{i+1}$ und somit $B^i\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow B^{i+1}\vec{x} = \vec{0}$. Daraus folgt
$\vec{x} \in \ker B^{i+2} \Leftrightarrow B^{i+2}\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow BB^{i+1}\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow BB^i\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow B^{i+1}\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} \in \ker B^{i+1}$.

Das bedeutet $r_{i+2} = r_{i+1} = r_i$. Induktiv folgt, dass dann stets $r_{i+k} = r_i$ ist.

Dass der Fall $r_i = r_{i+1}$ überhaupt eintritt, liegt daran, dass der Kern von B im $\mathbb{C}^n$ höchstens n-dimensional werden kann.

(Die Tatsache $r_w = r$ ist genaugenommen die einzige Tatsache, die hier nicht bewiesen wird.)

2.3 Lemma 2

Die Zuwächse in den Dimensionen $s_\nu := r_\nu - r_{\nu-1}$ sind monoton abnehmend:
$0 = s_{w+1} < s_w \leq s_{w-1} \leq \cdots s_2 \leq s_1 = r_1$.

Beweis:

Dies ist ein etwas schwierigerer Beweis: die Behauptung folgt aus der Tatsache, dass die Abbildung $B : {}^{\ker B^{i+2}}\!/\!_{\ker B^{i+1}} \to {}^{\ker B^{i+1}}\!/\!_{\ker B^i}$ injektiv ist.

Der Beweis erfolgt in drei Schritten:

1. Definition von B zwischen den Quotientenräumen
2. B ist injektiv
3. Beweis der Aussage des Lemmas.

Gebraucht wird $\vec{v} \in \ker B^{p+1} \Leftrightarrow B^{p+1}\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow B^pB\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow B\vec{v} \in \ker B^p$.

zu 1. Für $\vec{v} \in \ker B^{i+2}$ ist $B\vec{v} \in \ker B^{i+1}$

Die Elemente aus ${}^{\ker B^{i+2}}\!/\!_{\ker B^{i+1}}$ sind Äquivalenzklassen von Vektoren mit $B^{i+2}\vec{v} = \vec{0}$, wobei $\vec{v}_1 \sim \vec{v}_2$ ist, falls $B^{i+1}\vec{v}_1 = B^{i+1}\vec{v}_2$ ist.

Analog sind die Elemente von ${}^{\ker B^{i+1}}\!/\!_{\ker B^i}$ Äquivalenzklassen von Vektoren mit $B^{i+1}\vec{w} = \vec{0}$, wobei $\vec{w}_1 \sim \vec{w}_2$ ist, falls $B^i\vec{w}_1 = B^i\vec{w}_2$ ist.

Zunächst muss gezeigt werden, dass B wohldefiniert ist, d.h. falls $B\vec{v}_1 = \vec{w}_1$ und $B\vec{v}_2 = \vec{w}_2$ ist und $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ in derselben Äquivalenzklasse in $\ker B^{i+2}$ liegen, dann liegen auch $\vec{w}_1$ und $\vec{w}_2$ in derselben Äquivalenzklasse im Bildraum $\ker B^{i+1}$. Wegen der Linearität reicht es die Behauptung für $\vec{v}_2 = \vec{0}$ und $\vec{w}_2 = \vec{0}$ zu zeigen.

Ist also $\vec{v}_1 \sim \vec{0}$, so ist $\vec{v}_1 \in \ker B^{i+1}$ und damit $\vec{w}_1 = B\vec{v}_1 \in \ker B^i$, also $\vec{w}_1 \sim \vec{0}$. $\square$

zu 2. Ist $B\vec{v} \sim \vec{0}$ in $\ker B^{i+1}$, so folgt $B^iB\vec{v} = \vec{0}$ und damit $B^{i+1}\vec{v} = \vec{0}$, also $\vec{v} \sim \vec{0}$ in $\ker B^{i+2}$
$\square$

zu 3. Benutzt werden zwei Tatsachen:
(i) Ist $L : V_1 \to V_2$ eine injektive lineare Abbildung zwischen den Vektorräumen V_1 und V_2, so ist $\dim V_1 \le \dim V_2$.
(ii) $\dim {}^{P}\!/_{Q} = \dim P - \dim Q$

Daher ist $\dim {}^{\ker B^{i+2}}\!/_{\ker B^{i+1}} \le \dim {}^{\ker B^{i+1}}\!/_{\ker B^{i}}$, also
$\dim \ker B^{i+2} - \dim \ker B^{i+1} \le \dim \ker B^{i+1} - \dim \ker B^{i} \Leftrightarrow r_{i+2} - r_{i+1} \le r_{i+1} - r_i \Leftrightarrow s_{i+2} \le s_{i+1}$
□

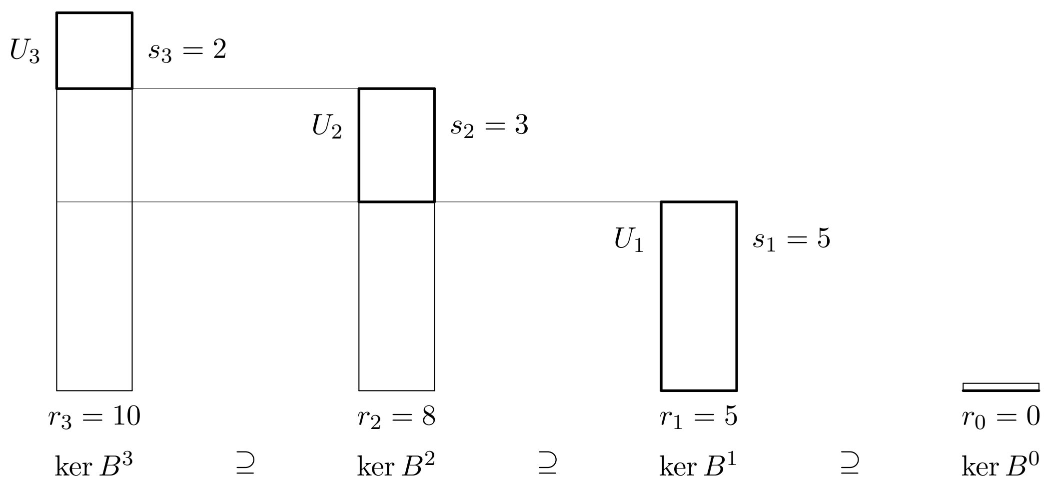
2.4 Definition

Der Kern von B^i heißt Hauptraum i+ter Stufe. Der Kern von B^r (das ist gleichzeitig die Vereinigung aller Kerne von B^i heißt verallgemeinerter Hauptraum.

Die Eigenvektoren bilden demnach den Hauptraum 1. Stufe.

Ab jetzt wird an einem Beispiel gearbeitet, um einer Indexinflation vorzubeugen.

In dem folgenden Beispiel ist $r = 10$, $r_1 = 5$, $r_2 = 5 + 3 = 8$ und $r_3 = 5 + 3 + 2 = 10$. Damit ist $s_1 = 5$, $s_2 = 3$ und $s_3 = 2$.

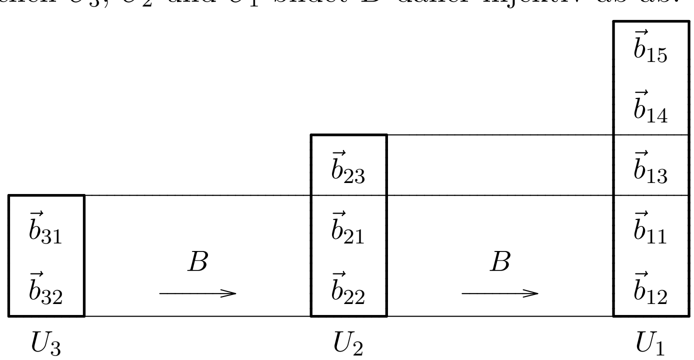


(Bild 1)

Man sieht:

$$\vec{v} \in \ker B^{\nu} \Leftrightarrow B^{\nu}\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow B^{\nu-1}(B\vec{v}) = \vec{0} \Leftrightarrow B\vec{v} \in \ker B^{\nu-1}.$$

Zwischen U_3, U_2 und U_1 bildet B daher injektiv ab ab:



(Bild 2)

Jetzt wird eine Basis $\vec{b}_{31}$ und $\vec{b}_{32}$ von U_3 gewählt.

Ausgehend davon werden weitere Vektoren definiert:

(i) $B\vec{b}_{31} = \vec{b}_{21}$, $B\vec{b}_{21} = \vec{b}_{11}$ und $B\vec{b}_{11} = \vec{0}$. (Jordankette der Länge 3)

(ii) $B\vec{b}_{32} = \vec{b}_{22}$, $B\vec{b}_{22} = \vec{b}_{12}$ und $B\vec{b}_{12} = \vec{0}$. (Jordankette der Länge 3)

Im dreidimensionalen Raum U_2 werden $\vec{b}_{21}$ und $\vec{b}_{22}$ durch $\vec{b}_{23}$ zu einer Basis ergänzt. Dann erhält man

(iii) $B\vec{b}_{23} = \vec{b}_{13}$, $B\vec{b}_{13} = \vec{0}$. (Jordankette der Länge 2)

Zum Schluß werden die bereits bestimmten Vektoren in U_1 zu einer Basis ergänzt:

(iv) $B\vec{b}_{14} = \vec{0}$ (Jordankette der Länge 1)

(v) $B\vec{b}_{15} = \vec{0}$ (Jordankette der Länge 1)

Damit ist die Abbildung B in der Basis $\vec{b}_{ij}$ eindeutig beschrieben.

Beachtet man jetzt

$$B\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \text{und} \quad B\vec{v} = \vec{w} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{w} \Leftrightarrow A\vec{v} = \lambda\vec{v} + \vec{w},$$

so ergibt sich in der Basis
$\vec{b}_{11}$, $\vec{b}_{21}$, $\vec{b}_{31}$,
$\vec{b}_{12}$, $\vec{b}_{22}$, $\vec{b}_{32}$,
$\vec{b}_{13}$, $\vec{b}_{23}$,
$\vec{b}_{14}$ und
$\vec{b}_{15}$
folgende Matrixdarstellung von A:

$$J := \left(\begin{array}{ccc|ccc|cc|c|c}
\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda
\end{array}\right)$$

J ist die (besser: eine) Jordanform der Abbildung A.

Faßt man die Vektoren $\vec{b}_{11}$ bis $\vec{b}_{11}$ zu einer Matrix C zusammen, so gilt $AC = CJ$, also $A = CJC^{-1}$.

Bezeichnungen:

Die Elemente von u_1 heißen Eigenvektoren oder Hauptvektoren 1. Stufe, die Elemente von U_i heißen Hauptvektoren i-ter Stufe

3 Praktische Durchführung

Gesucht sind die Jordanform und Transformationsmatrizen zu einer Selbstabbildung A des $\mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$).

(i) Berechne $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

(ii) zu jedem Eigenwert λ wird das folgende Verfahren durchgeführt:

1. Für jeden Eigenwert λ_ν bildet man $B := A - \lambda_\nu I$ und bestimme die Räume U_i, bis die Summe der Dimensionen die algebraische Vielfachheit von λ_ν ist.

   Dazu geht man iterativ vor: zunächst wird eine Basis für die Eigenvektoren (den Kern von B bestimmt (Gauß'scher Algorithmus)

   Berechne dann B^2 und berechne eine Basis des Kerns, indem die Basis von U_1 durch s_2 weitere Vektoren ergänzt wird. Diese ergänzenden Vektoren bilden eine Basis von U_2.

   Dann wird eine Basis von U_3 berechnet, indem die Basis von $\ker B^2$ durch s_3 weitere Vektoren (eine Basis von U_3) ergänzt wird u.s.w.

2. Jetzt werden die Jordanketten aus Bild 2 konstruiert:

   die Basis von U_3 wird durch Anwendung von B in U_2 abgebildet und aus den in 1 berechneten Basisvektoren zu einer Basis von U_2 ergänzt.

   Die so berechnete Basis wird wiederum mit B abgebildet und zu einer Basis ergänzt.

   Die j-Tupel $\vec{v}$, $B\vec{v}$, $\ldots B^{j-1}\vec{v}$ von Basisvektoren mit einem Startvektor $\vec{v} \in U_j$ bilden jeweils eine Jordankette der Länge j.

3. Sobald insgesamt λ_ν Basisvektoren bestimmt sind, ist die Arbeit für diesen Eigenwert getan.

(iii) Alle Jordanketten $\vec{v}$, $B\vec{v}$, $\ldots B^{j-1}\vec{v}$ werden in jeweils umgekehrter Reihenfolge (also der Eigenvektor zuerst) $B^{j-1}\vec{v}$, $B^{j-2}\vec{v}$, $\ldots \vec{v}$ nebeneinandergeschrieben und zu einer Matrix C zusammengefaßt.

In der Jordanmatrix J entspricht dieser Kette ein <u>Jordanblock</u> der Größe $j \times j$, der die Gestalt $J(j, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ mit dem Eigenwert λ hat.

Die Jordanmatrix J ist dann eine Blockdiagonalmatrix, die aus den einzelnen Jordanblöcken besteht.

4 Beispiel

$$A := \begin{bmatrix} 2&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&2&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&2&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&2&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&2&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&2&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&2&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&2&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&2 \end{bmatrix}$$

Dann berechnet man $p(\lambda) = (2-\lambda)^{10}$, 2 ist also 10-facher Eigenwert von A.

Weiter bekommt man

$$B := \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B^2 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Außerdem ist $B^3 = 0$.

U_1 ist der Kern von B. Er besteht aus allen Vektoren, die an der 1., 3., 4. 8. und 9. Stelle eine Null haben. Weil es in der Regel keine kanonische Wahl von Basisvektoren gibt, beschreiben wir U_1 durch

$$U_1 := \langle \vec{e}_2 - \vec{e}_5, \vec{e}_2 + \vec{e}_5, \vec{e}_6 - \vec{e}_2, \vec{e}_7 - \vec{e}_2, \vec{e}_{10} - \vec{e}_2 \rangle.$$

Der Kern von B^2 besteht aus allen Vektoren, die an der 3. und der 8. Stelle eine Null haben. Daher läßt sich U_2 durch

$$U_2 := \langle \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_9 \rangle$$

zu einer Basis von $\ker B^2$ ergänzen.

Da $\ker B^3$ aus allen Vektoren besteht, wählen wir

$$U_3 := \langle \vec{e}_3, \vec{e}_8 \rangle.$$

Jetzt werden die Jordanketten aufgebaut:

$$B\vec{e}_3 = \vec{e}_1, \quad B\vec{e}_1 = \vec{e}_2, \quad B\vec{e}_2 = \vec{0} \qquad \text{das sind } \vec{b}_{31}, \vec{b}_{21} \text{ und } \vec{b}_{11}$$

$$B\vec{e}_8 = \vec{e}_4, \quad B\vec{e}_4 = \vec{e}_6, \quad B\vec{e}_6 = \vec{0} \qquad \text{das sind } \vec{b}_{32},\ \vec{b}_{22} \text{ und } \vec{b}_{12}$$

Das sind die beiden Ketten der Länge 3.

In U_2 müssen jetzt die Bilder von Vektoren aus U_3 ($\vec{e}_1$ und $\vec{e}_4$) zu einer Basis ergänzt werden. Dazu wählen wir $\vec{b}_{23} = \vec{e}_1 + \vec{e}_9$ und bilden die nächste Jordankette:

$$B(\vec{e}_1 + \vec{e}_9) = \vec{e}_2 + \vec{e}_5, \quad B(\vec{e}_2 + \vec{e}_5) = \vec{0} \qquad \text{das sind } \vec{b}_{23} \text{ und } \vec{b}_{13}$$

In U_1 muß der Spann von $\vec{e}_2$, $\vec{e}_6$ und $\vec{e}_2 + \vec{e}_5$ zu einer Basis ergänzt werden. Dazu wählen wir

$$\vec{b}_{14} = \vec{e}_{10} - \vec{e}_2 \quad \text{und} \quad \vec{b}_{15} = \vec{e}_7 - \vec{e}_2.$$

Damit haben wir: in der Basis $\vec{b}_{11}$, $\vec{b}_{21}$, $\vec{b}_{31}$, $\vec{b}_{12}$, $\vec{b}_{22}$, $\vec{b}_{32}$, $\vec{b}_{13}$, $\vec{b}_{23}$,$\vec{b}_{14}$ und $\vec{b}_{15}$ hat A die Gestalt J von oben.

Es ist hier $C = (\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_6, \vec{e}_4, \vec{e}_8, \vec{e}_2 + \vec{e}_5, \vec{e}_1 + \vec{e}_9, \vec{e}_{10} - \vec{e}_2, \vec{e}_7 - \vec{e}_2)$ und damit

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{und}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Jordanform von A läßt sich nun durch $A = CJC^{-1}$ und $J = C^{-1}AC$ erreichen.