

Zusätze zum Gelben Rechenbuch

LU-Zerlegung

Peter Furlan

Verlag Martina Furlan

Inhaltsverzeichnis

1	Definitionen	1
2	(Allgemeine) LU-Zerlegung	2
3	Vereinfachte LU-Zerlegung	3
4	Lösung eines linearen Gleichungssystems mit LU-Zerlegung.	4
5	Beispiele	5
6	Kurzschreibweisen	7
7	LU-Zerlegung mit Ansätzen	10

1 Definitionen

Die LU-Zerlegung oder LR-Zerlegung ist die Zerlegung einer quadratischen Matrix A in ein Produkt $A = PLU$. Dabei ist L eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonale und U eine obere Dreiecksmatrix. Ist A nicht singulär, besteht die Diagonale von U aus Zahlen ungleich Null. P ist eine Permutationsmatrix, die aus der Einheitsmatrix durch Vertauschen von Spalten entsteht. Das bedeutet, dass P in jeder Zeile und Spalte genau eine Eins enthält und ansonsten aus Nullen besteht. Besondere Eigenschaft von P : es ist $P^\top = P^{-1}$.

Bezeichnungen: LU bedeutet „lower-upper“, LR bedeutet „links-rechts“.

Reguläre Matrizen können stets als PLU -Produkt geschrieben werden. In manchen Fällen ist die P -Matrix (die durch Pivotierung u.a. für bessere numerische Stabilität sorgt), nicht nötig oder erwünscht. Dann entsteht die vereinfachte LU-Zerlegung von A als $A = LU$.

2 (Allgemeine) LU-Zerlegung

In diesem Rechenverfahren werden Matrizen folgender Form benutzt:

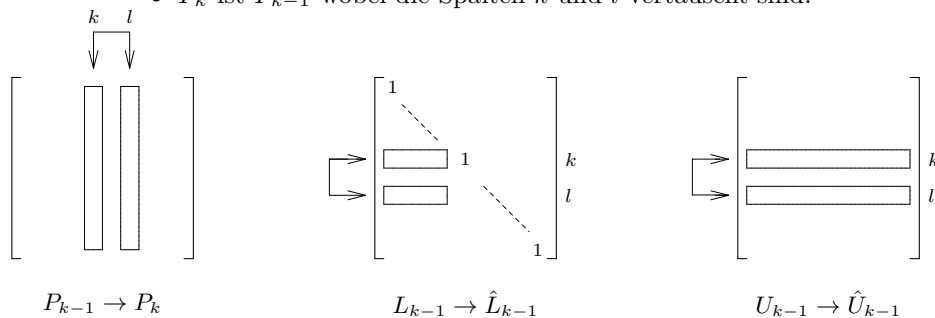
$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccc}
 1 & & & \\
 * & & & \\
 & & & \\
 * & & & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccc}
 u_{11} & & & \\
 0 & & & * \\
 & & & \\
 0 & & & * \\
 & & & \\
 0 & & & u_{n,k}
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

L_{k-1} und \hat{L}_{k-1} haben diese Form $\hat{U}_{k-1} = (u_{ij})$. U_{k-1} hat dieselbe Gestalt.

- ① Start: $P_0 = L_0 = E_n$, $U_0 = A$.
- ② Für jedes k von 1 bis $n - 1$ werden die folgenden Schritte durchgeführt:
 - ①' Zeilen vertauschen

Dieser Schritt ist nötig, falls U_{k-1} an der Position (k, k) eine Null enthält. Man kann auch an dieser Stelle pivotieren, und die Zeile k mit derjenigen Zeile l darunter vertauschen, die in der Spalte k das betragsgrößte Element enthält.

- \hat{U}_{k-1} ist U_{k-1} mit den Zeilen k und $l > k$ vertauscht
- \hat{L}_{k-1} ist L_{k-1} , wobei die ersten $k - 1$ Elemente der Zeilen k und l vertauscht sind (für $k = 1$ ist hier nichts zu tun)
- P_k ist P_{k-1} wobei die Spalten k und l vertauscht sind.



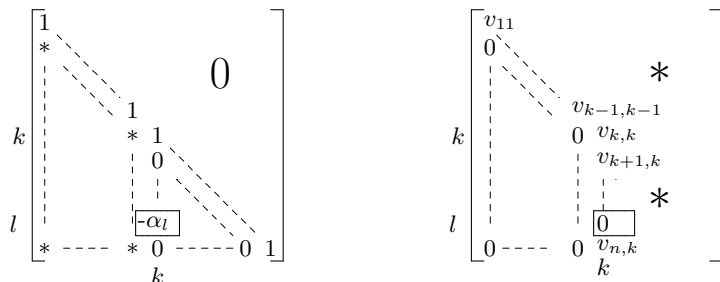
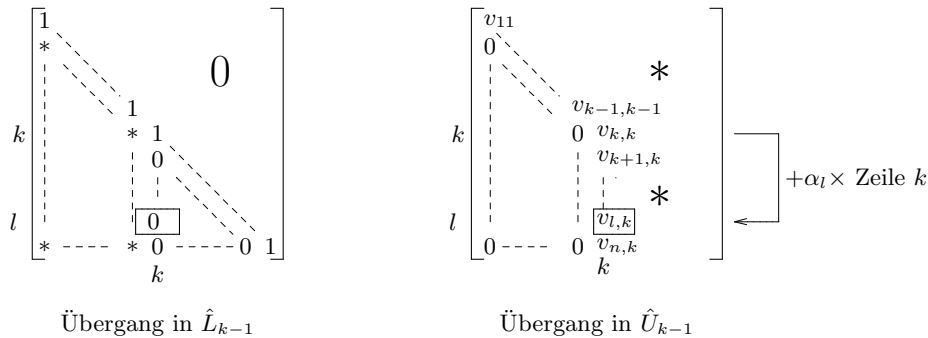
Wird dieser Schritt übersprungen, wird einfach $P_k := P_{k-1}$, $\hat{L}_{k-1} := L_{k-1}$ und $\hat{U}_{k-1} := U_{k-1}$ gesetzt.

- ②' Eliminationsschritt

In diesem Schritt werden Vielfache der Zeile k zu den Zeilen darunter addiert.

α_l sei der Quotient der Einträge u_{lk} und u_{kk} in \hat{U}_{k-1} , also $\alpha_l = \frac{u_{lk}}{u_{kk}}$.

- Dann entsteht U_k aus \hat{U}_{k-1} , indem das $-\alpha_l$ -fache der Zeile k zu den Zeilen l mit $l > k$ addiert wird. Das ist genau das, was man beim Gauß-Algorithmus tut, um unterhalb des Diagonalelements u_{kk} Nullen zu erzeugen.
- L_k ist \hat{L}_{k-1} mit Einträgen α_l in Zeile l der Spalte k .



Wird in \hat{U}_{k-1} an der Position (l, k) eine Null erzeugt, wird in \hat{L}_{k-1} an der Position (l, k) das Negative von α_l eingesetzt.

- ③ Mit $P := P_{n-1}$, $L := L_{n-1}$ und $U := U_{n-1}$ ist die Zerlegung $A = PLU$ erreicht.

An jeder beliebigen Stelle kann eine Probe gemacht werden:

Stets muss $P_k L_k U_k = A$ und $P_k \hat{L}_{k-1} \hat{U}_{k-1} = A$ sein.

Bei dieser Variante der LU-Zerlegung hat die L -Matrix stets Einträge vom Betrag kleiner als eins.

3 Vereinfachte LU-Zerlegung

Die vereinfachte LU-Zerlegung nimmt in L und U dieselben Umformungen wie oben im Eliminationsschritt vor. Die P -Matrix fällt ebenso weg wie der Schritt mit den Zeilenvertauschungen.

Beispiel 1: Zerlegung von $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

Wieder werden beide Matrizen in eine große geschrieben.

$$[L_0|U_0] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 \end{array} \right]$$

Die erste Zeile wird mit -2 multipliziert zur zweiten und mit 1 multipliziert zur dritten addiert. Daher wird in L_1 an in Spalte 1 in der zweiten Zeile eine 2 und in der dritten eine -1 eingetragen.

$$[L_1|U_1] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right]$$

Die zweite Zeile wird mit -1 multipliziert zur dritten addiert. Daher wird in $L = L_2$ in Spalte 2 in der dritten Zeile eine 1 eingetragen.

Damit ist die LU-Zerlegung von $A = LU$ mit $L = L_2$ und $U = U_2$ erbracht.

Beispiel 2: Zerlegung von $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Dieses Beispiel zeigt, dass die vereinfachte LU-Zerlegung nicht immer möglich ist, da man ohne Zeilenvertauschungen keine Null in der unteren linken Ecke von $A = L_0$ erzeugen kann. Die allgemeine Zerlegung ist extrem einfach: es ist $P = A$ und $L = U = E_2$.

4 Lösung eines linearen Gleichungssystems mit LU-Zerlegung.

Zur Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ nimmt man folgende Schritte vor:

- ① Bestimme die LU-Zerlegung von A : $A = PLU$
- ② Löse $P\vec{z} = \vec{b}$ durch $\vec{z} = P^T\vec{b}$
- ③ Löse $L\vec{y} = \vec{z}$ rekursiv, beginnend mit y_1 .
- ④ Löse $U\vec{x} = \vec{y}$ rekursiv, beginnend mit x_n .

Bei der vereinfachten LU-Zerlegung ist $P = E$, ② fällt weg und es ist $\vec{z} = \vec{b}$.

5 Beispiele

Beispiel 1: LU -Zerlegung von $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 & -10 \\ 3 & 7 & -3 & 5 \\ 12 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 12 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

Die drei Matrizen werden in einer großen Matrix zusammengefasst:

$$[P_0|L_0|U_0] = [E|E|A] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 5 & 3 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 7 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 12 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 12 & 0 & -8 \end{array} \right]$$

$k = 1$

- ① Pivotierung: Das betragsgrößte Element der ersten Spalte von U_0 ist die 12 in der dritten Zeile. Die erste und dritte Zeile in U_0 werden vertauscht. Dann ändert sich in L_0 nichts und in P_0 werden die erste und dritte Spalte vertauscht.

$$[P_1|\hat{L}_0|\hat{U}_0] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 7 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 5 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 12 & 0 & -8 \end{array} \right]$$

- ② Elimination.

Die erste Zeile wird

- (i) mit $-1/4$ multipliziert und zur 2. Zeile addiert
- (ii) mit $-1/2$ multipliziert und zur 3. Zeile addiert

Daher werden in \hat{L}_0 folgende Werte eingetragen:

- (i) $1/4$ an Position (2,1)
- (ii) $1/2$ an Position (3,1)

$$[P_1|L_1|U_1] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 12 & 0 & -8 \end{array} \right]$$

$k = 2$

- ① Pivotierung. In der zweiten Spalte wird das betragsgrößte Element der zweiten bis vierten Zeile gesucht. Dies ist die 12. Daher werden in U_1 zweite

und vierte Zeile vertauscht. In P_1 vertauschen sich die zweite und vierte Spalte, in L_1 die Anfänge der zweiten bis vierten Zeile bis zur Position $k - 1 = 1$.

$$[P_2|\hat{L}_1|\hat{U}_1] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & -4 & 4 \end{array} \right]$$

② Elimination

Die zweite Zeile wird

(i) mit $-1/4$ multipliziert und zur 3. Zeile addiert

(ii) mit $-1/2$ multipliziert und zur 4. Zeile addiert

Daher werden in \hat{L}_1 folgende Werte eingetragen:

(i) $1/4$ an Position (3, 2)

(ii) $1/2$ an Position (4, 2)

$$[P_2|L_2|U_2] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 8 \end{array} \right]$$

$k = 3$

① Pivotierung: In U_2 werden die dritte und vierte Zeile vertauscht, in P_2 dritte und vierte Spalte. In L_2 werden die ersten beiden Einträge (bis zur Spalte $k - 1 = 2$) der dritten und vierten Zeile vertauscht.

$$[P_3|\hat{L}_3|\hat{U}_3] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{array} \right]$$

② Im Eliminationsschritt wird in \hat{U}_3 die mit $1/4$ multiplizierte dritte Zeile zur vierten addiert. Entsprechend wird in \hat{L}_3 an der Position (4, 3) der Wert $-1/4$ eingetragen.

$$[P_3|L_3|U_3] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & -1/4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{array} \right]$$

Damit ist die LU -Zerlegung von A erbracht: es ist

$$A = PLU = P_3L_3U_3 \quad \text{mit}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & -1/4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad U = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 12 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Beispiel 2: $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 & -10 \\ 3 & 7 & -3 & 5 \\ 12 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 12 & 0 & -8 \end{bmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{bmatrix} -10 \\ 14 \\ 8 \\ -8 \end{bmatrix}$

① Die LU -Zerlegung von A ist bereits im vorigen Beispiel vorgenommen worden.

② Die Lösung von $P\vec{z} = \vec{b}$ ist

$$\vec{z} = P^T \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ 14 \\ 8 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ 14 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

③ Löse $L\vec{y} = \vec{z}$, also $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & -1/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ 14 \\ -10 \end{bmatrix}.$

Zeilenweise ergibt sich von oben

$$y_1 = 8, y_2 = -8, 2 - 4 + y_3 = 14 \Rightarrow y_3 = 16 \quad \text{und} \quad 4 - 2 - 4 + y_4 = -10 \Rightarrow y_4 = -8$$

④ Löse $U\vec{x} = \vec{y}$, also $\begin{bmatrix} 12 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 12 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ 16 \\ -8 \end{bmatrix}.$

Zeilenweise ergibt sich von unten

$$-8x_4 = -8 \Rightarrow x_4 = 1, \quad -4x_3 + 8 = 16 \Rightarrow x_3 = -2, \quad 12x_2 - 8 = -8 \Rightarrow x_2 = 0 \quad \text{und} \quad 12x_1 - 8 + 4 = 8 \Rightarrow x_1 = 1.$$

Damit ist die Lösung $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$

6 Kurzschreibweisen

Da bei der LU -Zerlegung viel geschrieben wird, bieten sich beim Rechnen von Hand Abkürzungen an:

- ① Die Spalten der P -Matrix bestehen aus den kanonischen Einheitsvektoren. Bei der weiteren Berechnung wird nicht P , sondern $P^{-1} = P^\top$ benötigt, die mit der rechten Seite des Gleichungssystems multipliziert werden. Statt der P -Matrix werden nur rechts von U die Indizes der (Zeilen)-Einheitsvektoren in P^\top in der Form notiert:

$$[\vec{e}]$$

d.h. werden in U die Spalten k und l vertauscht, werden rechts davon in der P^\top -Kurzschreibweise die Einträge an den Stellen k und l vertauscht.

Die Spalte $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ bedeutet zum Beispiel, dass für $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$ das Produkt $P^\top \vec{b}$ zu $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_2 \end{bmatrix}$ wird. ergibt; d.h. in $P^\top \vec{b}$ werden die Elemente von \vec{b} so angeordnet, wie es die Abkürzungszahlen für P angeben.

- ② Die L - und U -Matrizen werden in einer einzigen Matrix notiert. Die Einträge von L_k werden in U_k an der Stelle notiert, an denen eine Null erzeugt worden ist. Dazu wird der Teil der Matrix, der zu L gehört, durch eine Linie abgetrennt.

Bei einem Pivotierungsschritt werden dann die gesamten Zeilen der Matrix samt dem rechts danebenstehenden Vektor mit den P -Informationen vertauscht.

- ③ Wer noch fauler ist, kann folgendes machen:
Wenn mit der k -ten Zeile der Gaußschritt zur Erzeugung von L_k und U_k durchgeführt wurde, wird diese Zeile sowohl in L wie auch in U nie mehr verändert und braucht nicht erneut aufgeschrieben zu werden. Solche Zeilen werden durch ein \surd markiert und erst am Schluß eingesammelt.

Beispiel 1: Beispiel 1 in Kurzschreibweise

$$\text{Ausgangssituation: } [P_0|L_0|U_0] = [E|E|A] : \left[\begin{array}{cccc} 6 & 5 & 3 & -10 \\ 3 & 7 & -3 & 5 \\ 12 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 12 & 0 & -8 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \right].$$

Pivotierung: Vertausche Zeilen 1 und 3

$$[P_1|\hat{L}_0|\hat{U}_0] : \left[\begin{array}{cccc} 12 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 7 & -3 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & -10 \\ 0 & 12 & 0 & -8 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{array} \right]$$

Eliminationsschritt: Addiere das $-1/4$ -fache der ersten Zeile zur zweiten und das $-1/2$ -fache zur dritten (und das 0-fache zur vierten).

$$[P_1|L_1|U_1] : \left[\begin{array}{cccc|c} 12 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ \hline 1/4 & 6 & -4 & 4 & 2 \\ 1/2 & 3 & 1 & -12 & 1 \\ 0 & 12 & 0 & -8 & 4 \end{array} \right]$$

Pivotierung: vertausche Zeilen 2 und 4

$$[P_2|\hat{L}_1|\hat{U}_1] : \left[\begin{array}{cccc|c} 12 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ \hline 0 & 12 & 0 & -8 & 4 \\ 1/2 & 3 & 1 & -12 & 1 \\ 1/4 & 6 & -4 & 4 & 2 \end{array} \right]$$

Elimination: Addiere das $-1/4$ -fache der zweiten Zeile zur dritten und das $-1/2$ -fache zur vierten.

$$[P_2|L_2|U_2] = \left[\begin{array}{cccc|c} 12 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ \hline 0 & 12 & 0 & -8 & 4 \\ 1/2 & 1/4 & 1 & -10 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & -4 & 8 & 2 \end{array} \right]$$

Pivotierung: vertausche Zeilen 3 und 4:

$$[P_3|\hat{L}_3|\hat{U}_3] : \left[\begin{array}{cccc|c} 12 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ \hline 0 & 12 & 0 & -8 & 4 \\ 1/4 & 1/2 & -4 & 8 & 2 \\ 1/2 & 1/4 & 1 & -10 & 1 \end{array} \right]$$

Elimination: Addiere das $1/4$ -fache der dritten Zeile zur vierten:

$$[P_3|L_3|U_3] = \left[\begin{array}{cccc|c} 12 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ \hline 0 & 12 & 0 & -8 & 4 \\ 1/4 & 1/2 & -4 & 8 & 2 \\ 1/2 & 1/4 & -1/4 & -8 & 1 \end{array} \right]$$

Daraus setzt man wie oben U und L zusammen, indem man für L den Teil unter der Trennlinie in eine Einheitsmatrix kopiert und für U diesen Teil auf Null setzt:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & -1/4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad U = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 12 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Der Vektor neben dem Gleichungssystem gibt an, an welchen Positionen die Zeilen von P eine Eins enthalten: die erste an der dritten, die zweite an der vierten, die dritte an der ersten und die vierte an der zweiten Position.

P braucht allerdings nicht explizit berechnet zu werden. In $\vec{z} = P^T \vec{b}$ erhält man

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 14 \\ 8 \\ -8 \end{bmatrix} \quad \text{also} \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} b_3 \\ b_4 \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ 14 \\ -10 \end{bmatrix}$$

und weiter geht es wie oben.

7 LU-Zerlegung mit Ansätzen

Eine (k, l) -Bandmatrix ist eine Matrix, in der neben der Diagonalen nur Elemente von Null verschieden sein können, die höchstens k Zeilen unter oder l Zeilen über der Diagonalen liegen.

Bandmatrix

Eine $(0, 0)$ -Bandmatrix ist eine Diagonalmatrix, eine $(1, 1)$ -Bandmatrix wird Tridiagonalmatrix genannt.

Tridiagonalmatrix

Wichtige Eigenschaft: Das Produkt einer $(k, 0)$ -Bandmatrix L und einer $(0, l)$ -Bandmatrix U ist eine (k, l) -Bandmatrix. Das lässt sich dadurch ausnutzen, dass man die LU -Zerlegung von Bandmatrizen durch einen Ansatz zu ermitteln versucht. Dieses Verfahren bestimmt eine LU -Zerlegung ohne Pivotierung.

- ① Man macht einen Ansatz für L als $(k, 0)$ -Bandmatrix mit einer Diagonale von Einsen und U als $(0, l)$ -Bandmatrix.
- ② Die erste Zeile des Produkts wird ausgewertet. Das ergibt Bedingungen für die erste Zeile von U . Die erste Spalte ergibt Bedingungen für die erste Spalte von L .
- ③ Rekursiv werden die restlichen Produkte der k -ten Zeile und Spalte des Produkts ausgewertet. Zusammen mit den bereits bestimmten Elementen von L und U erhält man die fehlenden Elemente der k -ten Zeile von U und der k -ten Spalte von L .

<p>Beispiel 1: $A =$</p> $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 & 6 \end{bmatrix}$
--

- ① Da A eine Tridiagonalmatrix ist, ist der Ansatz $A = LU$ mit

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{54} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} & u_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{55} \end{bmatrix}$$

- ② Nun werden die Produkte der ersten Zeile und Spalte ausgewertet, die nicht von vornherein Null sind:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} & u_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{55} \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{54} & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1/2} & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

Daraus ergibt sich: $1 \cdot u_{11} = 1 \Rightarrow u_{11} = 1$ und $1 \cdot u_{12} = 2 \Rightarrow u_{12} = 2$ und dann mit dem schon gefundenen Wert von u_{11} :

$$l_{21} \cdot u_{11} = 1/2 \Rightarrow l_{21} = 1/2.$$

- ③ Dasselbe mit der zweiten Zeile und Spalte:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} & u_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{55} \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{54} & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \boxed{3} & \boxed{3} & 0 & 0 \\ \boxed{2/3} & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

Wie oben ist: $2 \cdot 1/2 + 1 \cdot u_{22} = 3 \Rightarrow u_{22} = 2$ und $1 \cdot u_{23} = 3 \Rightarrow u_{23} = 3$ und dann mit dem schon gefundenen Wert von u_{22} :

$$l_{32} \cdot u_{22} = 2/3 \Rightarrow l_{32} = 1/3.$$

- ④ Dritte Zeile und Spalte:

$$\begin{array}{c|c}
 \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} & u_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{55} \end{array} \right] & \\
 \hline
 \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{54} & 1 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} & & \\ & \boxed{4} & \boxed{4} & 0 \\ & \boxed{3/4} & & \\ & 0 & & \end{array} \right]
 \end{array}$$

Genauso: $1/3 \cdot 3 + 1 \cdot u_{33} = 4 \Rightarrow u_{33} = 3$ und $1 \cdot u_{34} = 4 \Rightarrow u_{34} = 4$, und dann mit dem schon gefundenen Wert von u_{33} :

$$l_{43} \cdot u_{33} = 3/4 \Rightarrow l_{43} = 1/4.$$

⑤ Vierte und fünfte Zeile und Spalte:

$$\begin{array}{c|c}
 \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} & u_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{55} \end{array} \right] & \\
 \hline
 \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{54} & 1 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} & & \\ & \boxed{5} & \boxed{5} \\ & \boxed{4/5} & \boxed{6} \end{array} \right]
 \end{array}$$

Vierte Zeile und Spalte: $1/4 \cdot 4 + 1 \cdot u_{44} = 5 \Rightarrow u_{44} = 4$ und $1 \cdot u_{45} = 5 \Rightarrow u_{45} = 5$, und dann mit dem schon gefundenen Wert von u_{44} :

$$l_{54} \cdot u_{44} = 4/5 \Rightarrow l_{54} = 1/5.$$

Schließlich ist in der unteren rechten Ecke

$$l_{54} \cdot u_{45} + u_{55} = 1/5 \cdot 5 + u_{55} = 6 \Rightarrow u_{55} = 5.$$

Damit ist $A = LU$ mit

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$