4.4 Taylorentwicklung

1. Definitionen

f sei eine reellwertige $m+1$-mal stetig differenzierbare Funktion der n Variablen x_1 bis x_n auf einem Gebiet $M \subset \mathbb{R}^n$. Die Verbindungsgerade der Punkte $\vec{a}$ und $\vec{a}+\vec{h}$ liege ganz in M. Dann gilt die Taylorformel

Taylorformel

$$
\boxed{\begin{aligned} f(\vec{a}+\vec{h}) &= T_m f(\vec{h}) + R_m f(\vec{h}) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\Big((\nabla\cdot\vec{h})^k f\Big)(\vec{a}) + \frac{1}{(m+1)!}\Big((\nabla\cdot\vec{h})^{m+1} f\Big)(\vec{a}+\vartheta\vec{h}), \quad \vartheta \in]0,1[. \end{aligned}}
$$

Wie in Kapitel 2.10 heißt $T_m f$ (m-tes) Taylorpolynom (in den n Variablen h_1 bis h_n) und $R_m f$ m-tes Restglied.

Taylor-polynom

Restglied

Das Taylorpolynom enthält die Werte von f und den partiellen Ableitungen bis zur m-ten Ordnung am Entwicklungspunkt $\vec{a}$, das Restglied die Werte der $m+1$-sten partiellen Ableitungen an einer Zwischenstelle $\vec{a}+\vartheta\vec{h}$, $\vartheta \in]0,1[$.

Dabei ist ∇ der Nabla-Operator $\nabla = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big)$ und $\vec{h}$ der Vektor $(h_1, h_2, \dots, h_n)^\top$. $\nabla\cdot\vec{h}$ ist das (Matrix-)Produkt dieser beiden Vektoren, also

Nabla-Operator ∇

$$(\nabla\cdot\vec{h})^k = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}h_n\Big)^k.$$

Beim Ausmultiplizieren dieses Ausdrucks kommt es wegen des Satzes von Schwarz auf die Reihenfolge der Ableitungsoperatoren nicht an. In konkreten Fällen verwendet man als Variablennamen statt x_1 bis x_n oft x, y usw.

Andere übliche Schreibweise der Taylorformel: wenn man $\vec{x} = \vec{a}+\vec{h}$ setzt, ist $\vec{h} = \vec{x}-\vec{a}$ und man hat

$$
\boxed{f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\Big((\nabla\cdot(\vec{x}-\vec{a}))^k f\Big)(\vec{a}) + \frac{1}{(m+1)!}\Big((\nabla\cdot(\vec{x}-\vec{a}))^{m+1} f\Big)(\vec{a}+\vartheta(\vec{x}-\vec{a}))}
$$

Bei dieser Schreibweise muß man unbedingt beachten, daß der Nablaoperator in der Klammer nur auf f und nicht auf den Vektor $\vec{x}$ wirkt! Für den Entwicklungspunkt $\vec{x}=\vec{0}$ lautet die Formel

Achtung!

$$
\boxed{f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\Big((\nabla\cdot\vec{x})^k f\Big)(\vec{0}) + \frac{1}{(m+1)!}\Big((\nabla\cdot\vec{x})^{m+1} f\Big)(\vartheta\vec{x})}
$$

2. Berechnung

Berechnung im Fall $n = 2$

Fall $n = 2$

Hier verwenden wir die Variablen x und y. Es ist $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ und $\vec{h} = (h_1, h_2)^\top$.
Damit hat das Produkt $\nabla \cdot \vec{h}$ die Form $\nabla \cdot \vec{h} = \frac{\partial}{\partial x} h_1 + \frac{\partial}{\partial y} h_2$ und die Potenz $(\nabla \cdot \vec{h})^k$ läßt sich mit Hilfe der binomischen Formel auswerten:

$$(\nabla \cdot \vec{h})^k f(x,y) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\partial^k}{\partial x^j \partial y^{k-j}} f(x,y) h_1^j h_2^{k-j}.$$

Die Taylorformel hat also die Gestalt

$$\boxed{\begin{aligned} f(a+h_1, b+h_2) &= \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Big(\frac{\partial^k}{\partial x^j \partial y^{k-j}} f\Big)(a,b)\ h_1^j h_2^{k-j} \\ &+ \frac{1}{(m+1)!} \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} \Big(\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^j \partial y^{m+1-j}} f\Big)(a+\vartheta h_1, b+\vartheta h_2)\ h_1^j h_2^{m+1-j} \end{aligned}}$$

ϑ liegt wie immer zwischen Null und Eins.

Daraus ergibt sich folgendes praktische Verfahren, daß beispielhaft für den Fall $m = 2$ (d.h. Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung, das Restglied enthält die dritten Ableitungen) aufgeschrieben ist:

① Man schreibt alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung $m + 1$ in einem Schema auf, das wie das Pascalsche Dreieck aufgebaut ist.

1. Dreieck

$$\begin{array}{ccccccccl} & & & f & & & & & \leftarrow \text{0. Zeile} \\ & & f_x & & f_y & & & & \leftarrow \text{1. Zeile} \\ & f_{xx} & & f_{xy} & & f_{yy} & & & \leftarrow m\text{-te Zeile, hier 2. Zeile} \\ f_{xxx} & & f_{xxy} & & f_{xyy} & & f_{yyy} & & \leftarrow m+1\text{-ste, hier 3. Zeile} \end{array}$$

②
- In der ersten bis zur m-ten Zeile werden die Werte der Funktion und Ableitungen an der Entwicklungsstelle (a, b) notiert
- in der letzten, also der $m + 1$-sten Zeile die Werte an einer Zwischenstelle $(\tilde{a}, \tilde{b})$ mit $\tilde{a} = a + \vartheta h_1$ und $\tilde{b} = b + \vartheta h_2$:

2. Dreieck

$$\begin{array}{ccccccccl} & & & f(a,b) & & & & & \leftarrow \text{0. Zeile} \\ & & f_x(a,b) & & f_y(a,b) & & & & \leftarrow \text{1. Zeile} \\ & f_{xx}(a,b) & & f_{xy}(a,b) & & f_{yy}(a,b) & & & \leftarrow m\text{-te Zeile} \\ f_{xxx}(\tilde{a},\tilde{b}) & & f_{xxy}(\tilde{a},\tilde{b}) & & f_{xyy}(\tilde{a},\tilde{b}) & & f_{yyy}(\tilde{a},\tilde{b}) & & \leftarrow m+1\text{-ste Zeile} \end{array}$$

Darunter (oder daneben, wenn der Platz reicht), schreibt man in einem Pascalschen Dreieck die Terme auf, die bei der Binomialentwicklung von $(h_1+h_2)^k$ entstehen und daneben die Kehrwerte von $k!$

$$\begin{array}{ccc}
1 & 1 & \leftarrow \text{0. Zeile} \\
h_1 \quad h_2 & 1 & \leftarrow \text{1. Zeile} \\
h_1^2 \quad 2h_1h_2 \quad h_2^2 & \dfrac{1}{m!} = \dfrac{1}{2} & \leftarrow m\text{-te Zeile} \\
h_1^3 \quad 3h_1^2h_2 \quad 3h_1h_2^2 \quad h_2^3 & \dfrac{1}{(m+1)!} = \dfrac{1}{6} & \leftarrow m+1\text{-ste Zeile}
\end{array}$$

3. Dreieck

③ Jeder Term des zweiten Dreiecks (das die Werte an der Entwicklungs- bzw. Zwischenstelle enthält) wird mit dem entsprechenden Term des dritten Dreiecks (mit den Teilen von $(h_1+h_2)^k$) und mit dem in der entsprechenden Zeile stehenden Kehrwert von $k!$ multipliziert. Alle diese Werte werden addiert.

In der Entwicklung bis zur zweiten Ordnung bedeutet das

$$\begin{array}{lcl}
 & & f(a+h_1,b+h_2) \\
\text{0. Zeile} & = & f(a,b)\cdot 1\cdot 1 \\
\text{1. Zeile} & + & f_x(a,b)\cdot h_1\cdot 1 + f_y(a,b)\cdot h_2\cdot 1 \\
\text{2. Zeile} & + & f_{xx}(a,b)\cdot h_1^2\cdot\dfrac{1}{2} + f_{xy}(a,b)\cdot 2h_1h_2\cdot\dfrac{1}{2} + f_{yy}\cdot h_2^2\cdot\dfrac{1}{2} \\
\text{3. Zeile} & + & f_{xxx}(a+\vartheta h_1,b+\vartheta h_2)\cdot h_1^3\cdot\dfrac{1}{6} + f_{xxy}(a+\vartheta h_1,b+\vartheta h_2)\cdot 3h_1^2h_2\cdot\dfrac{1}{6} \\
 & + & f_{xyy}(a+\vartheta h_1,b+\vartheta h_2)\cdot 3h_1h_2^2\cdot\dfrac{1}{6} + f_{yyy}(a+\vartheta h_1,b+\vartheta h_2)\cdot h_2^3\cdot\dfrac{1}{6}
\end{array}$$

Beispiel 1: Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung von $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ am Punkt $(a,b)=(2,1)$.

① Alle Ableitungen bis zur dritten Ordnung:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \frac{x}{y} & & & \\
 & & \frac{1}{y} & & \frac{-x}{y^2} & & \\
 & 0 & & \frac{-1}{y^2} & & \frac{2x}{y^3} & \\
0 & & 0 & & \frac{2}{y^3} & & \frac{-6x}{y^4}
\end{array}$$

② In den Zeilen 0 bis 2 des linken Dreiecks stehen die Werte für $x = 2$ und $y = 1$. In der dritten (der letzten) Zeile stehen die Werte der dritten Ableitungen an der Stelle $\tilde{a} = 2+\vartheta h_1$ und $\tilde{b} = 1+\vartheta h_2$. Daneben stehen die Teile von $(h_1+h_2)^k$ und die Kehrwerte der Fakultäten.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 2 & & & \\
 & & 1 & & -2 & & \\
 & 0 & & -1 & & 4 & \\
0 & & 0 & & \dfrac{2}{\tilde{b}^3} & & \dfrac{-6\tilde{a}}{\tilde{b}^4}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & h_1 & & h_2 & & \\
 & h_1^2 & & 2h_1h_2 & & h_2^2 & \\
h_1^3 & & 3h_1^2h_2 & & 3h_1h_2^2 & & h_2^3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1 \\ 1 \\ \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{6}
\end{array}
$$

③ Damit sieht die gesuchte Taylorentwicklung so aus:

$$
\begin{aligned}
\frac{2+h_1}{1+h_2} &= (2\cdot 1\cdot 1) + (1\cdot h_1\cdot 1 - 2\cdot h_2\cdot 1) + (-1\cdot 2h_1h_2\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot h_2^2\cdot\frac{1}{2}) \\
&+ \frac{2}{(1+\vartheta h_2)^3}\cdot 3h_1h_2^2\cdot\frac{1}{6} + \frac{-6(2+\vartheta h_1)}{(1+\vartheta h_2)^4}\cdot h_2^3\cdot\frac{1}{6} \\
&= 2 + h_1 - 2h_2 - h_1h_2 + 2h_2^2 + R_2(h_1,h_2) \text{ mit} \\
R_2(h_1,h_2) &= \frac{h_1h_2^2}{(1+\vartheta h_2)^3} - \frac{(2+\vartheta h_1)h_2^3}{(1+\vartheta h_2)^4}
\end{aligned}
$$

Allgemeiner Fall (drei und mehr Variable)

allgemeiner Fall

Im allgemeinen geht man bei einer Taylorentwicklung bis zur m-ten Ordnung so vor:

① Der Ausdruck $(\nabla\cdot\vec{h})^k = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}h_n\right)^k$ wird für $k = 2$ bis $k = m$ ausmultipliziert. Wenn man auch das Restglied benötigt, muß man auch die $m+1$-ste Potenz bilden.

② Die nötigen partiellen Ableitungen von f werden gebildet.

③ Das Taylorpolynom wird mit Hilfe der Ableitungswerte am Entwicklungspunkt $\vec{a}$ aufgebaut, das Restglied mit Werten an einer Zwischenstelle $\vec{a}+\vartheta\vec{h}$.

Beispiel 2: Zweites Taylorpolynom von $f(x,y,z) = e^{2x+yz}$ im Nullpunkt.

① Benötigt wird $\left(\frac{\partial}{\partial x}h_1 + \frac{\partial}{\partial y}h_2 + \frac{\partial}{\partial z}h_3\right)^2$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}h_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}h_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}h_3^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}h_1h_2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}h_1h_3 + 2\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}h_2h_3$$

② Die ersten partielle Ableitungen sind $f_x = 2e^{2x+yz}$, $f_y = ze^{2x+yz}$ und $f_z = ye^{2x+yz}$.

Es gibt 6 zweite partielle Ableitungen:

$$f_{xx} = 4e^{2x+yz}, \; f_{yy} = z^2e^{2x+yz}, \; f_{zz} = y^2e^{2x+yz}$$
$$f_{xy} = 2ze^{2x+yz}, \; f_{xz} = 2ye^{2x+yz}, \; f_{yz} = (1+yz)e^{2x+yz}$$

③ Die Werte der Ableitungen am Entwicklungspunkt $x = y = z = 0$ sind

$$f(0,0,0) = 1$$
$$f_x(0,0,0) = 2, \quad f_y(0,0,0) = f_z(0,0,0) = 0$$
$$f_{xx}(0,0,0) = 4, \quad f_{yz}(0,0,0) = 1$$
$$f_{yy}(0,0,0) = f_{zz}(0,0,0) = f_{xy}(0,0,0) = f_{xz}(0,0,0) = 0$$

Damit hat das zweite Taylorpolynom die Form

$$T_2f(h_1,h_2,h_3) = 1 + 2\cdot h_1 + \frac{1}{2}\cdot 4h_1^2 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot h_2h_3 = 1 + 2h_1 + 2h_1^2 + h_2h_3.$$

Wenn man will, kann man jetzt auch h_1, h_2 und h_3 durch x, y und z ersetzen:

$$T_2f(x,y,z) = 1 + 2x + 2x^2 + yz.$$

Vektorwertige Funktionen

Vektorwertige Funktionen

Die oben angegeben Formel dient der Taylorentwicklung reellwertiger Funktionen. Ist $\vec{f}$ eine $\mathbb{R}^k$-wertige Funktion, so geht man nach der "Grundregel" auf S. 50 vor. **Wichtig:** Bei der Bestimmung des Restglieds muß man in jeder Komponente eine eigene Zwischenstelle nehmen.

Das erste Restglied $R_1\vec{f}(h_1,h_2)$ bei der Taylorentwicklung von $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$ an der Stelle $(a,b) = (0,0)$ ist

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} f_{1xx}(\vartheta_1h_1,\vartheta_1h_2)h_1^2 + 2f_{1xy}(\vartheta_1h_1,\vartheta_1h_2)h_1h_2 + f_{1yy}(\vartheta_1h_1,\vartheta_1h_2)h_2^2 \\ f_{2xx}(\vartheta_2h_1,\vartheta_2h_2)h_1^2 + 2f_{2xy}(\vartheta_2h_1,\vartheta_2h_2)h_1h_2 + f_{2yy}(\vartheta_2h_1,\vartheta_2h_2)h_2^2 \end{pmatrix}$$

mit $\vartheta_1 \in]0,1[$ und $\vartheta_2 \in]0,1[$.

Analytische Funktionen

Analytische Funktionen

Analog zu Kapitel 2.12 heißt eine auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$ definierte Funktion f analytisch, wenn man sie um jeden Punkt von G in eine konvergente Potenzreihe in den Variablen x_1 bis x_n entwickeln kann. Eigenschaften:

- Alle Funktionen, die sich aus (eindimensionalen) analytischen Funktionen zusammensetzen, sind in ihrem Definitionsbereich analytisch.
- Analytische Funktionen lassen sich stets in Taylorreihen entwickeln. Die Taylorreihe konvergiert in einer Umgebung des Entwicklungspunkts gegen die Funktion.
- Das Taylorpolynom erhält man als den entsprechenden Abschnitt der Potenzreihe der Funktion.
- Bei der Ermittlung der Potenzreihen darf man Reihen ineinander einsetzen und miteinander multiplizieren.

3. Beispiele

Beispiel 3: Taylorentwicklung von $f(x,y) = \dfrac{e^x}{1-y}$ bis zur zweiten Ordnung um $(0,0)$, Angabe des Restglieds.

① Da auch das Restglied berechnet wird, müssen alle Ableitungen bis zur dritten Ordnung berechnet werden:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \frac{e^x}{1-y} & & & \\
 & & \frac{e^x}{1-y} & & \frac{e^x}{(1-y)^2} & & \\
 & \frac{e^x}{1-y} & & \frac{e^x}{(1-y)^2} & & \frac{2e^x}{(1-y)^3} & \\
\frac{e^x}{1-y} & & \frac{e^x}{(1-y)^2} & & \frac{2e^x}{(1-y)^3} & & \frac{6e^x}{(1-y)^4}
\end{array}$$

② In Funktion, erster und zweiter Ableitung werden die Werte am Entwicklungspunkt $(0,0)$ aufgeschrieben, bei der dritten Ableitung die Werte an einer Stelle $(\tilde{a},\tilde{b}) = (\vartheta x, \vartheta y)$ mit $\vartheta \in]0,1[$. Daneben stehen die Binomialkoeffizienten und die Kehrwerte der Fakultäten.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 1 & & 2 & \\
\frac{e^{\tilde{a}}}{1-\tilde{b}} & & \frac{e^{\tilde{a}}}{(1-\tilde{b})^2} & & \frac{2e^{\tilde{a}}}{(1-\tilde{b})^3} & & \frac{6e^{\tilde{a}}}{(1-\tilde{b})^4}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & h_1 & & h_2 & & \\
 & h_1^2 & & 2h_1h_2 & & h_2^2 & \\
h_1^3 & & 3h_1^2h_2 & & 3h_1h_2^2 & & h_2^3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1/1 \\ 1/1 \\ 1/2 \\ 1/6
\end{array}$$

③ Damit wird das Taylorpolynom und das Restglied aufgebaut:

$$\begin{aligned}
f(h_1,h_2) &= 1+(h_1+h_2)+\frac{1}{2}(h_1^2+2h_1h_2+2h_2^2) \quad \text{(Taylorpolynom)}\\
&+ \underbrace{\frac{1}{6}\Big(\frac{e^{\tilde a}}{1-\tilde b}h_1^3+3\frac{e^{\tilde a}}{(1-\tilde b)^2}h_1^2h_2+3\frac{2e^{\tilde a}}{(1-\tilde b)^3}h_1h_2^2+\frac{6e^{\tilde a}}{(1-\tilde b)^4}h_2^3\Big)}_{\text{(Restglied)}}
\end{aligned}$$

Jetzt kann man h_1 und h_2 durch x und y ersetzen:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= 1+x+y+\frac{x^2}{2}+xy+y^2\\
&+ \frac{e^{\vartheta x}}{6}\Big(\frac{1}{1-\vartheta y}x^3+\frac{3}{(1-\vartheta y)^2}x^2y+\frac{6}{(1-\vartheta y)^3}xy^2+\frac{6}{(1-\vartheta y)^4}y^3\Big)\\
&\quad \vartheta\in]0,1[
\end{aligned}$$

Wird die gesamte Taylorreihe von f gesucht, kann man so vorgehen:

Da f sich aus analytischen Funktionen zusammensetzt und daher auch analytisch ist, ist die Taylorreihe mit der Potenzreihe identisch. Diese erhält man, wenn man die Potenzreihen der Faktoren miteinander multipliziert:

$$\frac{e^x}{1-y}=e^x\frac{1}{1-y}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\sum_{m=0}^{\infty}y^m=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^ny^m.$$

Das zweite Taylorpolynom kann man aus dieser Darstellung erhalten, wenn man alle Glieder heraussucht, in denen $n+m\le 2$ ist. Damit erhält man natürlich wieder dasselbe Polynom wie oben:

$$T_2f(x,y)=\underbrace{1}_{n=m=0}+\underbrace{x+y}_{n+m=1}+\underbrace{\frac{x^2}{2}+xy+y^2}_{n+m=2}.$$

Beispiel 4: Entwicklung von $f(x,y)=(x+2y)^3$ um $(a,b)=(-1,1)$

① Alle Ableitungen von f bis zur dritten Ordnung:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & (x+2y)^3 & & & \\
 & & 3(x+2y)^2 & & 6(x+2y)^2 & & \\
 & 6(x+2y) & & 12(x+2y) & & 24(x+2y) & \\
6 & & 12 & & 24 & & 48
\end{array}$$

Alle weiteren Ableitungen sind Null.

② Jetzt werden die Werte am Entwicklungspunkt $x = -1$, $y = 1$ aufgeschrieben. Daneben stehen die Binomialkoeffizienten und die Kehrwerte der Fakultäten.

1	1	$1/1$
$3 \quad 6$	$h_1 \quad h_2$	$1/1$
$6 \quad 12 \quad 24$	$h_1^2 \quad 2h_1h_2 \quad h_2^2$	$1/2$
$6 \quad 12 \quad 24 \quad 48$	$h_1^3 \quad 3h_1^2h_2 \quad 3h_1h_2^2 \quad h_2^3$	$1/6$

③ Da alle höheren Ableitungen Null sind, sind auch die entsprechenden Restglieder Null und die Funktion stimmt mit dem Taylorpolynom überein:

$$\begin{aligned} f(-1+h_1, 1+h_2) &= 1 \\ &\quad + 3h_1 + 6h_2 \\ &\quad + 3h_1^2 + 12h_1h_2 + 12h_2^2 \\ &\quad + h_1^3 + 6h_1^2h_2 + 12h_1h_2^2 + 8h_2^3 \end{aligned}$$

Ersetzt man h_1 durch $x+1$ und h_2 durch $y-1$, so erhält man $f(-1+h_1, 1+h_2) = f(x,y) = (x+2y)^3$

$$\begin{aligned} (x+2y)^3 &= 1 \\ &+ 3(x+1) + 6(y-1) \\ &+ 3(x+1)^2 + 12(x+1)(y-1) + 12(y-1)^2 \\ &+ (x+1)^3 + 6(x+1)^2(y-1) + 12(x+1)(y-1)^2 + 8(y-1)^3 \end{aligned}$$

Alternative: In $(x+2y)^3$ ersetzt man x durch $-1+h_1$ und y durch $1-h_2$. Dann multipliziert man die dritte Potenz aus und ersetzt h_1 wieder durch $x+1$ und h_2 durch $y-1$.

Beispiel 5: Die Taylorreihe von $\sin(x+y)$

Da die Funktion analytisch ist, stimmen Taylor- und Potenzreihe überein. Die Potenzreihe erhält man durch Einsetzen von $x+y$ in die Sinusreihe:

$$\sin(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x+y)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{m=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{m} x^m y^{2n+1-m}.$$

Mit $\displaystyle\binom{2n+1}{m} = \frac{(2n+1)!}{m!(2n+1-m)!}$ erhält man

$$\sin(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2n-1} \frac{(-1)^n}{m!(2n+1-m)!} x^m y^{2n+1-m}.$$