Ergänzung zu Abschnitt 6.11, Reduktionsverfahren von d'Alembert

Das auf Seite 94ff beschriebene Reduktionsverfahren hat zwei Nachteile: zum einen muss man eine Lösung vorgegeben haben, die in der ersten Komponente von Null verschieden ist, zum anderen hat man keinen Vorteil davon, wenn man schon mehr als eine Lösung des Dgl.-Systems kennt. Beide Nachteile vermeidet das nachfolgend beschriebene verallgemeinerte Reduktionsverfahren.

Gegeben sei ein $n \times n$-System $\vec{y}\,' = A(x)\vec{y}$, wobei bereits k linear unabhängige Lösungen $\vec{h}_1(x)$ bis $\vec{h}_k(x)$ bekannt seien.

1. Bilde die Matrix

$$H(x) = (H_1, H_2) = (\vec{h}_1, \cdots, \vec{h}_k, \vec{h}_{k+1}, \vec{h}_n),$$

so dass H regulär ist.

d.h. die ersten k Spalten von H (die Teilmatrix H_1) bestehen aus den schon bekannten Lösungen, und die restlichen $n-k$ Spalten (die Teilmatrix H_2) werden so gewählt, daß H regulär ist. Dabei nimmt man natürlich möglichst einfache Vektoren $\vec{h}_{k+1}$ bis $\vec{h}_n$, eventuell Koordinateneinheitsvektoren.

2. Bilde die Matrix

$$B = H^{-1}(AH_2 - H_2') = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

B_1 ist eine Matrix mit $n-k$ Spalten und k Zeilen, und B_2 ist eine $(n-k) \times (n-k)$-Matrix.

3. Bestimme eine Fundamentalmatrix C_2 des reduzierten Systems $\vec{z}\,' = B_2(x)\vec{z}$.

Das ist ein $(n-k) \times (n-k)$-System. Im Fall $k = n-1$ ist es einfach eine homogene lineare Dgl.

4. Bilde die Matrix $C_1(x) = \int B_1(x)C_2(x)\,dx$. Das bedeutet, daß man in jeder Komponente des Matrizenprodukts irgendeine Stammfunktion nimmt.

5. Die Spalten von $HC = H\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ sind weitere $n-k$ linear unabhängige Lösungen von $\vec{y}\,' = A(x)\vec{y}$, die zusammen mit $\vec{h}_1$ bis $\vec{h}_n$ ein Fundamentalsystem bilden.

Beispiel 1: Beispiel 4 von Seite 95 im Intervall $]0,\pi[$:

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} \cot x & 0 \\ -1-\dfrac{\cot x}{x} & \dfrac{1}{x} \end{pmatrix} \vec{y}, \text{ bekannte Lösung: } \vec{h}_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}.$$

① Wähle $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$. Die bekannte Lösung $\vec{h}_1$ wurde also durch $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu einer invertierbaren Matrix ergänzt.

② Mit $H^{-1} = \dfrac{1}{-x}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist

$$B = H^{-1}(AH_2 - H_2') = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{x} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \cot x & 0 \\ -1-\dfrac{\cot x}{x} & \dfrac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{x} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cot x \\ -1-\dfrac{\cot x}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{x} - \dfrac{\cot x}{x^2} \\ \cot x \end{pmatrix}$$

Es ist also $B_2 = \cot x$ und $B_1 = \dfrac{-1}{x} - \dfrac{\cot x}{x^2}$.

③ Wie auf S. 96 im Schritt ② erhält man $C_2(x) = \sin x$.

④ Wie in Schritt ③ ist $C_1(x) = \displaystyle\int \left(-\frac{1}{x} - \frac{\cot x}{x^2}\right) \sin x \, dx = \frac{\cos x}{x}$

⑤ $HC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\cos x}{x} \\ \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ ist damit eine weitere Lösung des Dgl.-Systems.

Man erkennt, dass das die gleichen Rechnungen wie auf Seite 95f sind, das Verfahren ist aber übersichtlicher.

Beispiel 2: Beispiel 4 auf Seite 45 ohne „scharfes Nachdenken“
$y''' - \cot x\, y'' - y' + \cot x\, y = 0 \quad (*)$
die Lösungen $y_1 = e^x$ und $y_2 = e^{-x}$ sind bekannt.

Wie in Abschnitt 6.11 auf Seite 90f beschrieben, wird die Dgl. 3. Odnung in ein 3×3-System 1. Ordnung umgeschrieben:

Mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$ gilt: y löst $(*) \Leftrightarrow \vec{u}$ löst $\vec{u}\,' = A\vec{u}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\cot x & 1 & \cot x \end{pmatrix}$

Wegen des Aufbaus von $\vec{u} = (y, y', y'')^\top$ haben die bekannten Lösungen die Form

$$\vec{h}_1(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \\ e^x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{h}_2(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix}.$$

① Wähle $H = (H_1, H_2) = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} & 1 \\ e^x & -e^{-x} & 0 \\ e^x & e^{-x} & 0 \end{pmatrix}$.

② Es ist $B = H^{-1}(AH_2 - H_2') = H^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\cot x \end{pmatrix}$. Da B eine Matrix mit einer Spalte ist, kann man $B = \vec{b}$ als Vektor auffassen. Statt H zu invertieren, benutzt man die Tatsache, dass $B = \vec{b} = H^{-1}(AH_2 - H_2')$ die Lösung der Gleichung $H\vec{b} = AH_2 - H_2'$ ist. Wir berechnen diese mit Hilfe der Cramerschen Regel: im Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{ccc|c} e^x & e^{-x} & 1 & 0 \\ e^x & -e^{-x} & 0 & 0 \\ e^x & e^{-x} & 0 & -\cot x \end{array} \right)$$

ist die Determinante $D = 2$, und damit folgt für die Komponenten von $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)^\top$

$$b_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} & 1 \\ 0 & -e^{-x} & 0 \\ -\cot x & e^{-x} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} e^{-x} \cot x$$

$$b_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} e^x & 0 & 1 \\ e^x & 0 & 0 \\ e^x & -\cot x & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} e^{x} \cot x \text{ und}$$

$$b_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & 0 \\ e^x & -e^{-x} & 0 \\ e^x & e^{-x} & -\cot x \end{vmatrix} = \cot x$$

Damit ist $B_2 = b_3 = \cot x$ und $B_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2\, e^{-x} \cot x \\ -1/2\, e^{x} \cot x \end{pmatrix}$.

③ Jetzt wird das reduzierte System $\vec{z}\,' = B_2(x)\vec{z}$ gelöst: eine Lösung von $z' = \cot x\, z$ ist $z = \sin x$. Es ist also $C_2(x) = \sin x$.

④ Es ist $C_1(x) = \int B_1(x) C_2(x)\, dx = \int \begin{pmatrix} -1/2\, e^{-x} \cot x \\ -1/2\, e^{x} \cot x \end{pmatrix} \sin x\, dx$

$= -\frac{1}{2} \int \begin{pmatrix} e^{-x} \cos x \\ e^{x} \cos x \end{pmatrix} dx = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{-x}(\sin x - \cos x) \\ e^{x}(\sin x + \cos x) \end{pmatrix}$

⑤ Die dritte Lösung des Systems ist

$$HC = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} & 1 \\ e^x & -e^{-x} & 0 \\ e^x & e^{-x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -{}^1\!/\!_4\, e^{-x}(\sin x - \cos x) \\ -{}^1\!/\!_4\, e^{x}(\sin x + \cos x) \\ \sin x \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}$$

Ein drittes Element eines Fundamentalsystems der Ausgangsdifferentialgleichung ist die erste Komponente y der gerade gefundenen Lösung $\vec{u}$: $y = {}^1\!/\!_2 \sin x$ oder $y = \sin x$.